COLLECTION QUEYSANNE-REVUZ

MATHEMATIQUE

Tome 3
GEOMETRIE

TERMINALES
CE

FERNAND NATHAN

NOUVELLE COLLECTION DIRIGÉE

PAR

MICHEL QUEYSANNE
Ancien élève de l'E.N.S.
Maître assistant à l'Université de Paris VII

ANDRÉ REVUZ
Ancien élève de l'E.N.S.
Professeur à l'Université de Paris VII

MATHÉMATIQUE

par
JOËLLE PICHAUD
Ancienne élève de l'E.N.S.
Assistante agrégée à l'Université de Paris VII
et
ANDRÉ REVUZ

TERMINALE CE

tome 3

GÉOMETRIE

FERNAND NATHAN EDITEUR
18, rue Monsieur-le-Prince, PARIS VI

A la même Librairie

NOUVELLE COLLECTION QUEYSANNE-REVUZ

- MATHÉMATIQUE classe de 6e
- TRAVAUX DIRIGÉS classe de 6e
- MATHÉMATIQUE classe de 5e
- TRAVAUX DIRIGÉS classe de 5e
- MATHÉMATIQUE classe de 4e
- TRAVAUX DIRIGÉS classe de 4e
- MATHÉMATIQUE classe de 3e
- TRAVAUX DIRIGÉS classe de 3e
- MATHÉMATIQUE classe de 2e A
- MATHÉMATIQUE classes de 2e CT
  - Tome 1
  - Tome 2
- MATHÉMATIQUE classes de 1re AB
  - Tome 1
  - Tome 2
- MATHÉMATIQUE classes de 1re CDE
  - Tome 1
  - Tome 2
- MATHÉMATIQUE classe terminale A
- MATHÉMATIQUE classe terminale B
- MATHÉMATIQUE classes terminales CDE

Term. CE Tome 1 : Nombres. Probabilités
Term. D Tome 1 : Nombres. Probabilités. Géométrie
Term. CDE Tome 2 : Analyse
Term. CE Tome 3 : Géométrie

© Fernand Nathan, Paris 1972

Avant-propos

Ce manuel qui achève la collection traite de la première théorie mathématique qui ait été édifiée par l'humanité, la Géométrie, mais il s'efforce de le faire en utilisant, conformément au programme, tout l'outillage que les siècles passés ont mis au point et qui en permet une étude profonde et précise.

La vie de la pensée mathématique n'apparaît pas toujours aisément dans les écrits mathématiques. Du long cheminement : aborder une situation, cerner les points importants, poser les « bonnes » questions, en chercher les réponses, mettre en forme les résultats acquis et énoncer les problèmes restés ouverts, les œuvres écrites ne font souvent apparaître que la dernière phase.

Et cependant on ne peut comprendre véritablement ce qu'est la mathématique, ni même un résultat particulier, si l'on n'a pas participé personnellement et au moins partiellement au cheminement intellectuel qui y mène, si l'on n'a pas connu les tâtonnements inséparables de toute recherche, si modeste soit-elle.

Malheureusement, un manuel qui voudrait suivre dans le détail les étapes du cheminement total (même en négligeant le fait qu'il y a souvent plusieurs cheminements différents) serait d'une dimension rédhibitoire. Il faut donc choisir, mais peut-être peut-on ne pas choisir de la même manière pour traiter tous les sujets. On remarquera que le ton de ce manuel est différent suivant les chapitres ou les paragraphes. C'est ainsi, par exemple, que si les rappels et compléments d'algèbre linéaire sont exposés avec la sobriété du style mathématique impersonnel qui permet à un lecteur déjà un peu familiarisé avec la question d'en avoir sous forme condensée, une idée précise et solide, en revanche, l'introduction à la structure affine a été totalement reprise; on s'est efforcé de montrer l'évolution des idées qui a abouti à son élaboration, avant de passer à son étude technique.

Avoir acquis une culture mathématique, c'est pour une part, être également capable de mettre sous forme précise les résultats d'une étude, que de retrouver sous l'exposé impersonnel et froid des traités mathématiques la chaleur du travail dont ils rendent compte.

Nous souhaiterions que ce manuel aide les élèves de Terminale C et E à acquérir cette culture.

M. Q. et A. R

1| Espaces vectoriels et applications linéaires

Avant d'aborder l'étude de la géométrie, ce chapitre a pour objet de rappeler et de préciser, sous une forme condensée, les définitions et les résultats qui sont essentiels dans l'étude et l'utilisation des espaces vectoriels et des applications linéaires. A l'importance fondamentale de la structure d'espace vectoriel correspond celle des applications d'un espace vectoriel dans un autre qui sont compatibles avec cette structure, c'est-à-dire les applications linéaires. L'étude de la structure et celle de ces applications ne peuvent être dissociées.

Préliminaire : Notion de famille

Nous allons d'abord donner quelques définitions relatives à la notion de famille d'éléments d'un ensemble, notion qui sera souvent utilisée dans la suite de ce cours.

1. 1 FAMILLE D'ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE E

Définition.

I étant un ensemble, on appelle **famille d'éléments d'un ensemble** E, indexée par I, toute application de I dans E.

Soit f une telle application; pour tout élément i de I notons x_i l'élément $f(i)$ de E. On désigne alors par $(x_i)_{i \in I}$ la famille définie par f.
Il arrive aussi que l'élément $f(i)$ soit noté x^i et la famille définie par f est alors désignée par $(x^i)_{i \in I}$. En effet, lorsqu'on utilise plusieurs familles indexées par I, il peut se révéler utile, pour la commodité des calculs, d'indexer les unes en bas et les autres en haut.
Il faut prendre garde de ne pas confondre la famille $(x_i)_{i \in I}$ avec l'ensemble $f(I) = \{x_i \mid i \in I\}$ qui est une partie de E appelée image de f.
L'ensemble I est appelé ensemble des indices ou ensemble d'indexation; lorsque card I est fini, on dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'éléments de E.

Définition.

Si g est une application de E dans un ensemble F et $(x_i)_{i \in I}$ la famille d'éléments de E définie par l'application f de I dans E, on appelle **image** de la famille $(x_i)_{i \in I}$ par g la famille d'éléments de F définie par l'application composée $g \circ f$ de I dans F. On la note $(g(x_i))_{i \in I}$.

1. 2 SOUS-FAMILLE

Définition.

Soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$ deux familles d'éléments de E indexées par les ensembles I et J respectivement.

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une **sous-famille** de la famille $(y_j)_{j \in J}$ si

- I est un partie de J.
- $\forall i \in I \quad x_i = y_i$.

Remarquons que si l'on désigne par f (resp. g) l'application de I (resp. J) dans E définissant la famille $(x_i)_{i \in I}$ (resp. $(y_j)_{j \in J}$), on peut exprimer que $(x_i)_{i \in I}$ est une sous-famille de $(y_j)_{j \in J}$ de la manière suivante :

- I est une partie de J;
- f est la restriction de g à I, ce qui s'écrit $f = g\,|_I$.

1. 3 FAMILLE CANONIQUEMENT ASSOCIÉE A UNE PARTIE DE E

Définition.

Si A est une partie de E, l'injection canonique de A dans E définit une famille d'éléments de E indexée par A. C'est, par définition, la **famille canoniquement associée à A**.

REMARQUE

Supposons que l'on se donne une application g de E dans un ensemble F. Si A est une partie de E, son image $g(A) = \{g(x) \mid x \in E\}$ est une partie de F à laquelle est canoniquement associée une famille d'éléments de F, famille indexée par $g(A)$ et qui n'est pas l'image par g de la famille canoniquement associée à A puisque cette dernière est indexée par A.

La famille associée à $g(A)$ et l'image par g de celle associée à A ont évidemment même image, à savoir $g(A)$, mais l'indexation canonique de $g(A)$ par elle-même est bijective tandis que l'indexation de $g(A)$ par A peut ne pas être injective.

I. Espaces vectoriels sur K

Dans toute la suite K *désigne un corps commutatif dont l'élément nul est noté* 0 *et l'élément unité* 1.

1. 4 AXIOMES

Définition.

On appelle **espace vectoriel sur un corps commutatif** K, ou encore K-espace vectoriel, tout ensemble E muni

- d'une loi interne, appelée addition et notée +, pour laquelle E est un groupe abélien;
- d'une loi externe $\begin{array}{l} K \times E \longrightarrow E \\ (\alpha, x) \longmapsto \alpha x \end{array}$

qui satisfait à

$$\forall (\alpha, \beta) \in K \times K \quad \forall x \in E \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x$$
$$\forall x \in E \quad 1\, x = x.$$

De plus ces deux lois vérifient :

$$\forall \alpha \in K \quad \forall (x, y) \in E \times E \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$
$$\forall (\alpha, \beta) \in K \times K \quad \forall x \in E \quad (\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x.$$

Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, ceux de K **scalaires**.
Rappelons la conséquence suivante des axiomes :
Quels que soient $\alpha \in K$ et $x \in E$ on a

$$(\alpha x = 0_E) \iff (\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E),$$

0_E désignant l'élément neutre du groupe abélien E, élément que, dans la suite, nous noterons 0 pour simplifier.

REMARQUE

La donnée d'une structure de K-espace vectoriel sur le groupe abélien (E, +) équivaut à la donnée d'un homomorphisme unitaire d'anneaux de K dans End (E, +), anneaux des endomorphismes du groupe E. En effet, si E est un K-espace vectoriel, l'application

$$\varphi : K \longrightarrow \mathrm{End}(E, +)$$

définie par $\forall \alpha \in K \quad \varphi(\alpha) : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \alpha x \end{array}$

est un homomorphisme unitaire d'anneaux puisque, d'après les axiomes,

$$\forall (\alpha, \beta) \in K \times K \quad \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$
$$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha) \circ \varphi(\beta)$$

et

$$\varphi(1) = \mathrm{Id}_E,$$

Id_E désignant l'application identique de E dans lui-même.

Réciproquement la donnée d'un homomorphisme unitaire d'anneaux φ de K dans End (E, +) permet de munir E d'une structure de K-espace vectoriel, et ceci en posant

$$\forall \alpha \in K \quad \forall x \in E \quad \alpha x = [\varphi(\alpha)](x).$$

La vérification des axiomes est laissée au lecteur.

Les définitions et propriétés données dans les chapitres 1, 2, 3, sont valables, sauf exception, pour des espaces vectoriels sur un corps commutatif quelconque K. Les seules exceptions concernent les corps de caractéristique 2, c'est-à-dire ceux pour lesquels quel que soit $\alpha \in K$, on a $\alpha + \alpha = 0$.

Elles peuvent être laissées de côté si l'on se restreint aux corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

EXEMPLES D'ESPACES VECTORIELS

1. $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Si $E_1, \ldots, E_n$ sont n espaces vectoriels sur K, on peut munir le produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ d'une structure de K-espace vectoriel en posant
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n \quad \forall (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n \quad \forall \alpha \in K$$
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$
Lorsque $E_1 = \ldots = E_n = E$, le produit cartésien est noté E^n.
3. Soit X un ensemble. Si E est un K-espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E (ensemble que l'on note aussi E^X) muni des lois
$$(f, g) \longmapsto f + g$$
et
$$(\alpha, f) \longmapsto \alpha f$$
définies par $\forall x \in X \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

a une structure de K-espace vectoriel.
4. L'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n, n étant un élément de $\mathbb{N}$.

1.5 SOUS-ESPACES VECTORIELS

a) Définitions.

Définition.

Soient E un espace vectoriel et S une partie de E. On dit que S est **une partie stable de l'espace vectoriel** E si

- S est stable pour la loi interne, i.e.

$$\forall (x, y) \in S^2 \qquad x + y \in S.$$

- S est stable pour la loi externe, i.e.

$$\forall \alpha \in K \qquad \forall x \in S \qquad \alpha x \in S.$$

Ceci nous conduit à poser la définition suivante :

Définition.

On dit qu'une partie non vide E′ de E est **un sous-espace vectoriel de** E si E′ est une partie stable de E et si, pour les lois induites sur elle par celles de E, E′ a une structure d'espace vectoriel.

Lorsque E′ est strictement inclus dans E, on dit qu'il est un sous-espace vectoriel **propre** de E. On a démontré en Première le résultat suivant :

Théorème.

Une partie de E est un sous-espace vectoriel si et seulement si c'est une partie stable.

REMARQUE

Ce théorème permet souvent de montrer qu'un ensemble a une structure d'espace vectoriel. En effet la plupart des espaces vectoriels que l'on rencontre sont des sous-espaces vectoriels d'un espace de fonctions du type $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, et pour affirmer qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel il suffit de vérifier la stabilité au lieu de tous les axiomes de la structure d'espace vectoriel.

EXEMPLES

1. L'ensemble $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$.
2. L'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}$) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions polynômes.
3. Si $0 \leqslant p \leqslant n$, le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ constitué des $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

b) Famille de sous-espaces vectoriels de E.

Les sous-espaces vectoriels de E sont des parties particulières de E; on peut donc considérer l'ensemble $\mathcal{S}$ des sous-espaces vectoriels de E, ensemble contenu dans $\mathcal{P}(E)$, et aussi des familles d'éléments de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire des familles de sous-espaces vectoriels de E.

Définition.

Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, on appelle **intersection de la famille** l'ensemble $\{x \mid x \in E, \forall i \in I \;\; x \in E_i\}$. Cet ensemble est noté $\bigcap_{i\in I} E_i$.

Il est immédiat que si x et y sont deux éléments de $\bigcap_{i\in I} E_i$ et si α est un scalaire, on a :

$$x + y \in \bigcap_{i\in I} E_i \quad \text{et} \quad \alpha x \in \bigcap_{i\in I} E_i,$$

autrement dit $\bigcap_{i\in I} E_i$ est une partie stable de E.

On peut alors conclure :

Théorème.

Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, indexée par un ensemble non vide I, l'intersection de la famille $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

c) Conséquence : Sous-espace vectoriel engendré par une partie de E.

Soit A une partie de E. Les sous-espaces vectoriels de E contenant A constituent une partie $\mathcal{S}_A$ de $\mathcal{S}$, et cette partie est non vide puisque $E \in \mathcal{S}_A$.
A cette partie $\mathcal{S}_A$ de $\mathcal{S}$ est canoniquement associée une famille d'éléments de $\mathcal{S}$, appelée *famille des sous-espaces vectoriels de E contenant A*.
L'intersection de cette famille est alors un sous-espace vectoriel de E, il contient A et c'est évidemment le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces vectoriels contenant A.
On obtient :

Théorème et définition.

Étant donnée une partie A de E, l'intersection de la famille des sous-espaces vectoriels de E contenant A est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A, on l'appelle **sous-espace vectoriel engendré par** A.

EXERCICE

1. Montrer que si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, le sous-espace vectoriel engendré par A est contenu dans le sous-espace vectoriel engendré par B.

d) Somme de deux sous-espaces vectoriels.

Définition.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle **somme de** E_1 **et de** E_2 le sous-espace vectoriel, noté $E_1 + E_2$, engendré par $E_1 \cup E_2$.

Théorème.

On a $E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$.

En effet, tout sous-espace vectoriel qui contient E_1 et E_2 doit contenir toutes les sommes $x_1 + x_2$ où x_1 décrit E_1 et x_2 décrit E_2.
Donc $E_1 + E_2$ contient $\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$.
Montrons maintenant que $\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$ est une partie stable de E :

si $\quad (x_1, x_1') \in E_1 \times E_1 \qquad (x_2, x_2') \in E_2 \times E_2 \quad$ et $\quad \alpha \in K$

$$(x_1 + x_2) + (x_1' + x_2') = (x_1 + x_1') + (x_2 + x_2')$$

et $\quad x_1 + x_1' \in E_1 \qquad x_2 + x_2' \in E_2$

de même $\quad \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$

et $\quad \alpha x_1 \in E_1 \quad , \quad \alpha x_2 \in E_2.$

On en déduit que l'ensemble $\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$ est un sous-espace vectoriel de E. Comme il contient E_1 et E_2, il contient $E_1 \cup E_2$ et par suite $E_1 + E_2$.
En conclusion $E_1 + E_2$ contient et est contenu dans l'ensemble

$$\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\};$$

ces deux ensembles sont donc égaux.

e) **Somme directe. Sous-espaces supplémentaires.**

Définition.

Soient E un espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Lorsque tout élément de $E_1 + E_2$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2, on dit que la somme $E_1 + E_2$ est **directe**.

NOTATION

Lorsque la somme $E_1 + E_2$ est directe on écrit $E_1 \oplus E_2$ au lieu de $E_1 + E_2$.

Théorème.

La somme $E_1 + E_2$ est directe si et seulement si

$$E_1 \cap E_2 = \{0\}.$$

Supposons d'abord la somme $E_1 + E_2$ directe et considérons un élément x de $E_1 \cap E_2$.
On peut alors décomposer 0 de la manière suivante

$$0 = x + (-x) \quad \text{où} \quad x \in E_1, -x \in E_2,$$

comme on a évidemment $0 = 0 + 0$ et que, par hypothèse, cette décomposition est unique, on obtient $x = 0$.
Réciproquement, si on a $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, considérons un élément x de $E_1 + E_2$. On sait que x s'écrit $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$;
supposons alors que $x = x'_1 + x'_2$ avec $x'_1 \in E_1$, $x'_2 \in E_2$,
on obtient

$$x'_1 + x'_2 = x_1 + x_2$$

d'où

$$x'_1 - x_1 = x_2 - x'_2,$$

or

$$x'_1 - x_1 \in E_1 \qquad x_2 - x'_2 \in E_2$$

donc $x'_1 - x_1 = x_2 - x'_2 = 0$, ce qui prouve bien l'unicité de la décomposition.

Définition.

Soit E un espace vectoriel. Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, on dit que E_1 et E_2 sont des **sous-espaces supplémentaires**.

EXERCICES

2. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les deux ensembles constitués respectivement des fonctions paires (i.e. $\{f \mid \forall x \in \mathbb{R} \; f(-x) = f(x)\}$) et des fonctions impaires (i.e. $\{f \mid \forall x \in \mathbb{R} \; f(-x) = -f(x)\}$) sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
3. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions s'annulant sur $[0, \alpha[$ où $\alpha \in [0, 1]$, et l'ensemble des fonctions s'annulant sur $[\alpha, 1]$ sont deux sous-espaces supplémentaires.

1. 6 COMBINAISONS LINÉAIRES

On a vu en Première que, si l'on se donne un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments d'un espace vectoriel E et un n-uplet $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ de scalaires, on pouvait définir l'élément $\alpha^1 x_1 + \ldots + \alpha^n x_n$ de E, élément noté $\sum_{i=1}^{n} \alpha^i x_i$; cet élément était, par définition, une *combinaison linéaire* des $x_1, \ldots, x_n$.
Donnons-nous maintenant une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E et une famille $(\alpha^i)_{i \in I}$ de scalaires. Lorsque les scalaires α^i sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux $\alpha^{i_1}, \ldots, \alpha^{i_n}$ l'expression $\alpha^{i_1} x_{i_1} + \ldots + \alpha^{i_n} x_{i_n}$ est parfaitement définie, on la note $\sum_{i \in I} \alpha^i x_i$.

Définition.

On dit qu'une famille $(\alpha^i)_{i \in I}$ d'éléments de K est **à support fini** si tous les α^i sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux, i.e. si card $\{i \mid i \in I, \alpha^i \neq 0\}$ est fini.

Rappelons que l'on note K^I (ou $\mathcal{F}(I, K)$) l'ensemble des familles d'éléments de K indexées par I. Nous conviendrons de désigner par $K^{(I)}$ le sous-ensemble des familles d'éléments de K, à support fini, indexées par I.
Nous laissons le lecteur vérifier, à titre d'exercice, que $K^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de K^I.

Définition.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un K-espace vectoriel E. On dit qu'un élément x de E est une **combinaison linéaire** des x_i s'il existe une famille $(\alpha^i)_{i \in I}$ de scalaires, à support fini, telle que l'on ait

$$x = \sum_{i \in I} \alpha^i x_i.$$

REMARQUE

Le lecteur s'étonnera peut-être des notations utilisées : $(x_i)_{i \in I}$ pour les familles de vecteurs, $(\alpha^i)_{i \in I}$ pour les familles de scalaires. Nous en donnerons une justification au paragraphe 9 de cette section.

Application : Sous-espace vectoriel engendré par une famille d'éléments de E.

Définition.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un espace vectoriel E. On appelle sous-espace vectoriel engendré par cette famille le sous-espace vectoriel engendré par la partie $\{x_i \mid i \in I\}$ de E, autrement dit le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les x_i.

Théorème.

Le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i \in I}$ est l'ensemble ayant pour éléments les combinaisons linéaires des x_i, i.e. l'ensemble

$$\left\{ \sum_{i \in I} \alpha^i x_i \;\middle|\; (\alpha^i)_{i \in I} \in K^{(I)} \right\}$$

En effet, le sous-espace vectoriel engendré par $\{x_i \mid i \in I\}$ contient toutes ces combinaisons linéaires.
D'autre part l'ensemble de ces combinaisons linéaires est un sous-espace vectoriel de E puisque

- si $(\alpha^i)_{i\in I}$ et $(\beta^i)_{i\in I}$ appartiennent à $K^{(I)}$, il en est de même de $(\alpha^i + \beta^i)_{i\in I}$

et
$$\sum_{i\in I} \alpha^i x_i + \sum_{i\in I} \beta^i x_i = \sum_{i\in I} (\alpha^i + \beta^i)\, x_i$$

- si $(\alpha^i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ et $\alpha \in K$, alors $(\alpha\alpha^i)_{i\in I} \in K^{(I)}$

et
$$\alpha \sum_{i\in I} \alpha^i x_i = \sum_{i\in I} (\alpha\alpha^i)\, x_i.$$

En conclusion $\left\{ \sum_{i\in I} \alpha^i x_i \;\middle|\; (\alpha^i)_{i\in I} \in K^{(I)} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant tous les x_i et contenu dans l'espace vectoriel qu'ils engendrent.
On en déduit l'égalité annoncée.
En particulier, si A est une partie de E le sous-espace vectoriel engendré par A est identique au sous-espace vectoriel engendré par la famille canoniquement associée à A, on obtient alors :

Corollaire.
Soit A une partie d'un espace vectoriel E. Le sous-espace vectoriel engendré par A est l'ensemble ayant pour éléments les combinaisons linéaires des éléments de A.

1. 7 FAMILLES GÉNÉRATRICES

Définition.
On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace vectoriel E est une **famille génératrice** si E est le sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

On en déduit immédiatement :

Théorème.
Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est génératrice si et seulement si tout élément de E est une combinaison linéaire des x_i.

De même nous dirons qu'une *partie* G *de* E *est génératrice* si la famille canoniquement associée à G est génératrice, autrement dit si le sous-espace vectoriel engendré par G est E.

Théorème.
Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ deux familles d'éléments d'un espace vectoriel E. On suppose que
(i) $(x_i)_{i\in I}$ est une sous-famille de $(y_j)_{j\in J}$
(ii) $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice.
Alors $(y_j)_{j\in J}$ est une famille génératrice.

Par hypothèse E est le sous-espace vectoriel engendré par la partie $\{x_i \mid i \in I\}$; comme on a aussi $\{x_i \mid i \in I\} \subset \{y_j \mid j \in J\}$, E est également le sous-espace vectoriel engendré par $\{y_j \mid j \in J\}$ ce qui montre que la famille $(y_j)_{j\in J}$ est génératrice.

1. 8 FAMILLES LIBRES

Définition.
On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un K-espace vectoriel E est une **famille libre** si aucune combinaison linéaire des x_i n'est nulle sans que tous ses coefficients soient nuls
i.e. $\forall (\alpha^i)_{i\in I} \in K^{(I)} \quad \left(\sum_{i\in I} \alpha^i x_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in I \quad \alpha^i = 0\right).$

De même on dit qu'une *partie* L *de* E *est libre* si la famille canoniquement associée à L est libre.
On emploie couramment la terminologie suivante :

- si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre, on dit que les vecteurs x_i sont **linéairement indépendants**;
- si la famille $(x_i)_{i\in I}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée** ou que les vecteurs x_i sont **linéairement dépendants.**

EXERCICE
Montrer qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si $\{x_i \mid i \in I\}$ est une partie libre et si l'indexation est injective (c'est-à-dire $x_i = x_j \Longleftrightarrow i = j$).

REMARQUE
Il résulte de l'exercice précédent que l'on pourra parler du nombre d'éléments ou du cardinal d'une famille libre $(x_i)_{i\in I}$ comme étant celui de la partie $\{x_i \mid i \in I\}$ (ou de I).

Nous nous proposons maintenant de donner une propriété caractéristique des familles libres.

Théorème.
Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace vectoriel E est libre si et seulement si tout élément du sous-espace vectoriel qu'elle engendre s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des x_i.

Supposons d'abord la famille $(x_i)_{i\in I}$ libre.
Si on a, pour un élément x du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$,
$$x = \sum_{i\in I} \alpha^i x_i = \sum_{i\in I} \beta^i x_i$$
où $(\alpha^i)_{i\in I}$ et $(\beta^i)_{i\in I}$ sont des familles de scalaires à support fini, on en déduit
$$\sum_{i\in I} (\alpha^i - \beta^i)\, x_i = 0$$
et par suite
$$\forall i \in I \quad \alpha^i - \beta^i = 0$$
ce qui prouve l'unicité des coefficients.

Réciproquement, soit $(\alpha^i)_{i \in I}$ une famille de scalaires à support fini telle que l'on ait

$$\sum_{i \in I} \alpha^i x_i = 0.$$

Comme on a évidemment $0 = \sum_{i \in I} \beta^i x_i$ où $(\beta^i)_{i \in I}$ est la famille définie par l'application nulle de I dans K (i.e. $\forall i \in I \quad \beta^i = 0$), on obtient par unicité

$$\forall i \in I \qquad \alpha^i = \beta^i = 0$$

ce qui montre que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

1. 9 BASES

Définitions.

On dit qu'une **famille** d'éléments d'un espace vectoriel est une **base** si cette famille est libre et génératrice.

De même on dit qu'une **partie** d'un espace vectoriel est une **base** si cette partie est libre et génératrice.

Il résulte de ces définitions que si $(e_i)_{i \in I}$ est une base d'un espace vectoriel E, à tout élément x de E on peut associer une unique famille $(\alpha^i)_{i \in I}$ de scalaires, à support fini, telle que $x = \sum_{i \in I} \alpha^i e_i$.

La famille $(\alpha^i)_{i \in I}$ est appelée famille des **coordonnées** de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$.

REMARQUE SUR LES NOTATIONS

Les notations mathématiques permettent de caractériser des éléments et d'exprimer des résultats sous une forme à la fois précise et condensée.

Toute notation est le fruit d'une convention. Si l'on peut concevoir, à la limite, que chacun soit libre du choix de ses notations, sous réserve de faire connaître ce choix à ses interlocuteurs, il existe, en pratique, un usage qui fait que certaines notations sont utilisées de préférence à d'autres dans certains cas. Malheureusement l'usage ne sanctionne pas toujours les meilleures notations, et la sagesse se garde autant d'un conformisme borné que de l'extravagance.

Une bonne notation doit allier des propriétés quelque peu contradictoires : être dépourvue d'ambiguïté sans faire appel à des graphismes trop compliqués, être simple et cependant aussi riche d'informations que possible. Elle doit se prêter facilement au calcul qu'elle doit guider discrètement et dont elle doit faciliter la vérification. Le bon usage des notations consiste essentiellement à ne pas en être l'esclave, ce qui signifie, en premier lieu que la compréhension doit, au-delà de la notation, aller aux propriétés de l'être qui est représenté. Un être mathématique n'est pas un vecteur parce que la lettre qui le représente est surmontée d'une flèche, mais parce qu'il est élément d'un ensemble qui a été muni d'une structure d'espace vectoriel. En second lieu, il faut être, le cas échéant, capable de changer de notation sans en être désorienté.

En Algèbre linéaire interviennent des vecteurs, éléments d'espaces vectoriels, et des scalaires, éléments des corps qui opèrent dans ces espaces vectoriels. Il peut être commode, dans ces conditions, de désigner les vecteurs par des minuscules latines, et les scalaires par des minuscules grecques.

Mais interviennent aussi très souvent des familles d'éléments, en particulier des familles de vecteurs et des familles de scalaires. Une famille de vecteurs peut se noter $(x_i)_{i \in I}$ ou $(x^i)_{i \in I}$, une famille de scalaires $(\alpha_i)_{i \in I}$ ou $(\alpha^i)_{i \in I}$.

Les combinaisons linéaires font intervenir des familles de vecteurs et des familles de scalaires indexées par le même ensemble d'indices.

Il est alors commode d'indexer de manières différentes vecteurs et scalaires et de noter, par exemple $(x_i)_{i \in I}$ et $(\alpha^i)_{i \in I}$ respectivement les deux familles qui interviennent dans la combinaison linéaire $\sum_{i \in I} \alpha^i x_i$. L'indice i, qu'on appelle alors souvent *indice de sommation*, figure dans chaque terme de la somme une fois en haut et une fois en bas.

D'autres indices peuvent intervenir. Par exemple, $(e_i)_{i \in I}$ peut être une base d'un espace vectoriel E, et $(\alpha^i)_{i \in I}$ les coordonnées d'un vecteur x par rapport à cette base. Mais si l'on a une famille de vecteurs $(x_j)_{j \in J}$, il sera tout naturel de désigner par $(\alpha^i_j)_{i \in I}$ la famille des coordonnées de x_j, et on aura la formule

$$x_j = \sum_{i \in I} \alpha^i_j e_i.$$

Dans cette formule, l'indice de sommation i ne figure pas dans le terme de gauche. On peut remplacer i par u dans la formule, à condition évidemment que α^u_j représente la coordonnée de x_j relative à e_u dans la base $(e_u)_{u \in I}$. On dit que i est un *indice muet*. L'indice j au contraire se trouve aussi bien à droite qu'à gauche, et en bas dans les deux cas. Cette convention, qui n'est pas obligatoire (aucune convention ne peut l'être !) a le mérite de faciliter la vérification des calculs : les indices muets (ou de sommation) figurent une fois en bas et une fois en haut dans chaque terme de la somme, et ne figurent pas dans la notation de la somme. Les autres figurent dans chaque terme et dans la notation de la somme à la même place.

Bien entendu, et conformément à ce qui a été dit précédemment, une notation telle que $x_j = \sum_{i \in I} \alpha_{ij} e_i$ peut être utilisée; mais c'est un fait que la distinction des rôles de i et de j est plus aisée avec la notation $\alpha^i_j e_i$ qu'avec la notation $\alpha_{ij} e_i$.

EXEMPLES DE BASES

1. Dans l'espace vectoriel K^n les n vecteurs $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ constituent une base appelée base canonique de K^n.
2. Si E est l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré au plus égal à n, la famille $(f_i)_{i \in \{0, \ldots, n\}}$ d'éléments de E, définie par
$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} \qquad f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^i$$
est une base de E.
3. Dans l'espace vectoriel $K^{(I)}$, la famille $(e_i)_{i \in I}$, où $\forall i \in I \quad e_i$ est l'application de I dans K définie par
$$\forall j \in I \qquad \begin{aligned} e_i(j) &= 0 \quad \text{si} \quad j \neq i \\ &= 1 \quad \text{si} \quad j = i \end{aligned}$$
est une base de $K^{(I)}$.
En effet si f est une application de I dans K, à support fini, on peut écrire
$$f = \sum_{i \in I} f(i)\, e_i$$

puisque tous les $f(i)$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux et que l'on a bien

$$\forall j \in I \quad f(j) = \sum_{i \in I} f(i)\, e_i(j).$$

tous les éléments de cette somme étant nuls sauf celui d'indice j qui est égal à $f(j$.
Ceci montre que la famille $(e_i)_{i \in I}$ est génératrice.
Montrons maintenant qu'elle est libre.
Supposons qu'il existe une famille $(\alpha^i)_{i \in I}$ de scalaires, à support fini, telle que

$$\sum_{i \in I} \alpha^i e_i = 0,$$

alors $\forall j \in I$ on a $\sum_{i \in I} \alpha^i e_i(j) = 0$

ce qui conduit à $\forall j \in I \quad \alpha^j = 0.$

1. 10 ESPACES DE DIMENSION FINIE

Nous rappelons et complétons les résultats donnés en Première.

Définition.

Un espace vectoriel E est dit de **type fini** s'il possède une famille génératrice finie ou, ce qui est équivalent, une partie génératrice finie.

Théorème.

(i) Si E a une famille génératrice indexée par un ensemble à p éléments, toute famille libre a au plus p éléments.
(ii) Si E a une partie génératrice ayant p éléments, toute partie libre a au plus p éléments.

Pour la démonstration de (ii) nous renvoyons au livre de Première, tome 2.
On obtient facilement le résultat (i) en remarquant que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si la partie $\{x_i \mid i \in I\}$ est génératrice, et que card $\{x_i \mid i \in I\} \leqslant \text{card } I = p$.
La propriété (i) est alors une conséquence de (ii).
Nous admettrons les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.

Tout espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$ possède des bases. Ces bases ont toutes même cardinal, appelé dimension de l'espace et noté dim E.

Lorsque $E = \{0\}$, on convient de poser dim $E = 0$.
On a plus précisément :

Théorème 2.

Soit E un espace vectoriel. Si G est une partie génératrice de E et L une partie libre de E contenue dans G, il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G$.

Nous allons en déduire :

Corollaire.

Soit E un espace vectoriel. Si L est une partie libre de E et G une partie génératrice de E, il existe une partie H de G, disjointe de L, telle que $L \cup H$ soit une base de E.

En effet $L \cup G$ est alors une partie génératrice de E contenant L et, d'après le théorème 2, on sait qu'il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset L \cup G$; alors, en notant H le complémentaire de L dans B $(H = B - L)$, on obtient le résultat annoncé.

EXERCICE

Montrer directement que tout espace vectoriel de type fini possède des bases.

On peut conclure de ce qui précède que si E est un espace vectoriel de type fini, E possède des bases (Théorème 1 ou exercice précédent) qui sont toutes finies et ont même nombre d'éléments. On dit dans ce cas que E est de **dimension finie.**

EXEMPLE

K^n est un K-espace vectoriel de dimension n.

Les espaces vectoriels de dimension 1 sont appelés *droites vectorielles*, ceux de dimension 2 sont appelés *plans vectoriels*.
Le résultat suivant a été obtenu en Première. Il donne deux caractérisations des bases d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème.

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $(x_i)_{i \in I}$ est une base
(ii) $(x_i)_{i \in I}$ est une famille libre et card $I = n$
(iii) $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice et card $I = n$.

EXERCICE

Démontrer ce théorème en utilisant le Corollaire du Théorème 2.

Théorème.

Si E est un espace vectoriel de dimension n tout sous-espace vectoriel de E est de dimension au plus égale à n.

En effet, si E′ est un sous-espace vectoriel de E, considérons une base B′ de E′. B′ est une partie libre de E et a donc au plus n éléments.

1. 11 APPLICATIONS : SOMMES DIRECTES, SOUS-ESPACES SUPPLÉMENTAIRES

a) Sommes directes.

Théorème.

Soient E un espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On désigne par B_1 une base de E_1 et par B_2 une base de E_2. Alors la somme $E_1 + E_2$ est directe si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $B_1 \cap B_2 = \varnothing$
(ii) $B_1 \cup B_2$ est une partie libre de E.
Dans ce cas $B_1 \cup B_2$ est une base de $E_1 \oplus E_2$.

Supposons d'abord la somme $E_1 + E_2$ directe, c'est-à-dire $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.
Comme 0 est le seul élément commun à E_1 et E_2 et qu'il n'appartient ni à B_1, ni à B_2, on a bien $B_1 \cap B_2 = \varnothing$.
S'il existe une combinaison linéaire nulle faisant intervenir les éléments de B_1 et ceux de B_2, on en déduit l'égalité de deux combinaisons linéaires, l'une ne faisant intervenir que les éléments de B_1, l'autre ne faisant intervenir que les éléments de B_2, et de $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, on déduit que chacune est nulle.
B_1 étant une partie libre de E la première combinaison linéaire a tous ses coefficients nuls, il en est évidemment de même pour la seconde, ce qui montre que tous les coefficients de la combinaison linéaire envisagée sont nuls et donc que $B_1 \cup B_2$ est une partie libre.
Pour établir la réciproque nous devons montrer que, si les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, l'intersection $E_1 \cap E_2$ est réduite à $\{0\}$.
Considérons donc un élément x de $E_1 \cap E_2$:
x est à la fois combinaison linéaire d'éléments de B_1 et combinaison linéaire d'éléments de B_2. On en déduit, par différence, une combinaison linéaire nulle faisant intervenir les éléments de B_1 et ceux de B_2. Il résulte alors des conditions (i) et (ii) que tous les coefficients de cette dernière combinaison sont nuls et que $x = 0$.
Il nous reste enfin à vérifier que si les conditions équivalentes du théorème sont vraies, $B_1 \cup B_2$ est une base de $E_1 \oplus E_2$. Nous savons déjà que $B_1 \cup B_2$ est une partie libre; c'est aussi une partie génératrice puisque tout élément de $E_1 \oplus E_2$, étant somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2, est combinaison linéaire d'éléments de B_1 et de B_2.

Corollaire 1.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe, on a

$$\dim (E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Soit B_1 (resp. B_2) une base de E_1 (resp. E_2).

On a $\quad \dim E_1 = \text{card } B_1 \quad$ et $\quad \dim E_2 = \text{card } B_2$.

Il résulte du théorème précédent que

$$\dim (E_1 \oplus E_2) = \text{card } B_1 \cup B_2$$

or B_1 et B_2 sont deux ensembles finis disjoints, donc

$$\text{card } B_1 \cup B_2 = \text{card } B_1 + \text{card } B_2$$

d'où

$$\dim (E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Corollaire 2.

Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E, on a

$$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim (E_1 + E_2) + \dim (E_1 \cap E_2).$$

Notons E_2' un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2.

On a $\quad E_1 + E_2 = E_1 + E_2'$

puisqu'un élément de $E_1 + E_2$ est somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 et que tout élément de E_2 n'appartenant pas à E_1 appartient à E_2'.

D'autre part $\quad E_1 \cap E_2' = (E_1 \cap E_2) \cap E_2' = \{0\}$.

Par suite E_1 et E_2' sont des sous-espaces supplémentaires de $E_1 + E_2$ et on a donc

$$\dim (E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2'.$$

Or $\quad \dim E_2 = \dim (E_1 \cap E_2) + \dim E_2'$,

ce qui conduit à

$$\dim (E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim (E_1 \cap E_2).$$

b) Sous-espaces supplémentaires.

Théorème.

Soit E un espace vectoriel. Tout sous-espace vectoriel E′ de E admet au moins un supplémentaire.
De plus, si $\dim E = n$ et $\dim E' = p$, tous les supplémentaires de E′ ont pour dimension $n - p$.

Soit B′ une base de E′; B′ est une partie libre de E et d'après le corollaire du théorème 2 du § 1.10, en posant $L = B'$ et $G = E$, on déduit qu'il existe une partie B″ de E disjointe de B′ et telle que $B' \cup B''$ soit une base de E.
Désignons alors par E″ le sous-espace vectoriel engendré par B″.
Nous sommes dans la situation suivante :

- B′ est une base de E′
- B″ est une base de E″
- $B' \cap B'' = \varnothing$
- $B' \cup B''$ est une base de E

et d'après le Théorème de a) on peut conclure que $E = E' \oplus E''$ c'est-à-dire que E″ est un supplémentaire de E′.

On a alors $\quad \dim E' + \dim E'' = \dim E$

c'est-à-dire $\quad \dim E'' = n - p$.

REMARQUE

Nous verrons en exercice qu'un sous-espace vectoriel a en général une infinité de supplémentaires.

II. Applications linéaires

1. 12 DÉFINITION. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels. On appelle **application linéaire** (ou morphisme) de E dans F toute application l de E dans F telle que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad l(x + y) = l(x) + l(y)$$
$$\forall \alpha \in K \quad \forall x \in E \quad l(\alpha x) = \alpha l(x).$$

Conséquences immédiates :

- $l(0) = 0$ (prendre $\alpha = 0$)
- l est injective si et seulement si pour tout élément non nul x de E, $l(x)$ est non nul.

En effet :

$$l \text{ non injective} \iff \exists (x_1, x_2) \in E^2 \; x_1 \neq x_2 \text{ et } l(x_1) = l(x_2)$$

Ce qui est encore équivalent, en posant $x = x_1 - x_2$, à

$$\exists x \in E \quad x \neq 0 \text{ et } l(x) = 0$$

REMARQUE

On a vu dans la section I de ce chapitre que la donnée d'une structure de K-espace vectoriel sur E (resp. F) est équivalente à la donnée d'un homomorphisme unitaire d'anneaux φ (resp. ψ) de K dans End (E, +) (resp. End (F, +)); nous laissons le lecteur vérifier, à titre d'exercice, qu'une application l de E dans F est un morphisme d'espaces vectoriels si et seulement si c'est un morphisme de groupes et si on a

$$\forall \alpha \in K \qquad l \circ \varphi(\alpha) = \psi(\alpha) \circ l.$$

EXEMPLES

1. Si $E_1, \ldots, E_n$, sont n K-espaces vectoriels, on a montré au § 1.1.a) (exemple 2) que l'on peut munir de manière canonique $E_1 \times \ldots \times E_n$ d'une structure de K-espace vectoriel. Alors, si on désigne par p_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) l'application de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans E_i définie par $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ (on dit que p_i est $i^{\text{ième}}$ projection), p_i est une application linéaire.
2. Soient X un ensemble et E un espace vectoriel. L'application de $\mathcal{F}(X, E)$ dans E, qui à un élément g de $\mathcal{F}(X, E)$ associe $g(x)$ (x étant un élément fixé de X), est linéaire.
3. L'application de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui à g associe $\int_0^1 g(t)\,dt$ est linéaire.
4. Si $\mathcal{D}([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables sur [0, 1], $\mathcal{D}([0, 1], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ et l'application
$$d : \quad \mathcal{D}([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$$
$$g \longmapsto g'$$
qui, à la fonction g, associe sa dérivée g', est linéaire.

Théorème.

E et F étant deux K-espaces vectoriels, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F.

Soient l et h deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ et α un scalaire.

• $l + h$ est linéaire :

$$\begin{aligned}
\forall (x, y) \in E^2 \quad (l+h)(x+y) &= l(x+y) + h(x+y) && \text{(définition de } l+h) \\
&= l(x) + l(y) + h(x) + h(y) && \text{(linéarité de } l \text{ et } h) \\
&= [l(x) + h(x)] + [l(y) + h(y)] \\
&= (l+h)(x) + (l+h)(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall \beta \in K \quad \forall x \in E \quad (l+h)(\beta x) &= l(\beta x) + h(\beta x) && \text{(définition de } l+h) \\
&= \beta l(x) + \beta h(x) && \text{(linéarité de } l \text{ et } h) \\
&= \beta\,[l(x) + h(x)] \\
&= \beta\,[(l+h)(x)]
\end{aligned}$$

• αl est linéaire :

$$\begin{aligned}
\forall (x, y) \in E^2 \quad (\alpha l)(x+y) &= \alpha\,[l(x+y)] && \text{(définition de } \alpha l) \\
&= \alpha\,[l(x) + l(y)] && \text{linéarité de } l) \\
&= \alpha l(x) + \alpha l(y) \\
&= (\alpha l)(x) + (\alpha l)(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall \beta \in K \quad \forall x \in E \quad (\alpha l)(\beta x) &= \alpha l(\beta x) && \text{(définition de } \alpha l) \\
&= \alpha\beta l(x) && \text{(linéarité de } l) \\
&= \beta\alpha\, l(x) && \text{(commutativité de K)} \\
&= \beta\,[\alpha l(x)] \\
&= \beta\,(\alpha l)(x).
\end{aligned}$$

On peut en conclure que $\mathcal{L}(E, F)$ est une partie stable de $\mathcal{F}(E, F)$, donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Composition des applications linéaires.

On a démontré en Première le résultat suivant :

Théorème.

Si E, F, G sont des K-espaces vectoriels et $l : E \to F$, $h : F \to G$ des applications linéaires, l'application composée $h \circ l : E \to G$ est linéaire.

ainsi que :

Corollaire.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, E)$ des applications linéaires de E dans lui-même, appelées **endomorphismes** de E, a pour l'addition et la composition des applications une structure d'anneau, en général non commutatif.

1. 13 ISOMORPHISMES D'ESPACES VECTORIELS

Définition.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et l une application linéaire de E dans F. On dit que l est un **isomorphisme d'espaces vectoriels** de E sur F s'il existe une application linéaire h de F dans E telle que

$$h \circ l = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad l \circ h = \mathrm{Id}_F.$$

On a caractérisé, en Première, les isomorphismes d'espaces vectoriels de la manière suivante :

Théorème.

Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle est bijective.

Les endomorphismes d'un espace vectoriel E qui sont bijectifs sont donc des isomorphismes de E sur lui-même; on sait que leur ensemble a, pour la composition des applications, une structure de groupe. Ce groupe est appelé **groupe linéaire** de E et est noté GL (E).

EXERCICES

1. Montrer que GL (E) n'est pas stable pour l'addition des applications.
2. *Détermination d'une application linéaire.*
Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Montrer qu'une application linéaire l de E dans un K-espace vectoriel F est parfaitement déterminée par la donnée de $l(e_1), \ldots, l(e_n)$, et que l'application
$$\varphi : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{F}(B, F)$$
définie par
$$\varphi(l)(e_i) = l(e_i)$$
($\varphi(l)$ est la restriction de l à B) est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

1.14 PROPRIÉTÉS CONSERVÉES PAR UNE APPLICATION LINÉAIRE

a) Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel.

Définition.

Étant donnés deux ensembles X et Y et une application f de X dans Y, on appelle image réciproque d'une partie B de Y l'ensemble $\{x \mid x \in X, f(x) \in B\}$.
Cet ensemble noté $f^{-1}(B)$ est une partie de X.

EXERCICES

1. Montrer que, pour toute partie B de Y on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$, avec égalité lorsque f est surjective.
De même, montrer que pour toute partie A de X, on a $f^{-1}(f(A)) \supset A$, avec égalité lorsque f est injective.
2. Montrer que pour toutes parties B_1, B_2 de Y, on a
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$
et
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$
3. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(Y) &\longrightarrow \mathfrak{P}(X) \\ B &\longmapsto f^{-1}(B) \end{aligned}$$
est injective lorsque f est surjective, et surjective lorsque f est injective.

REMARQUE

Lorsque f est une application bijective, il est d'usage de noter f^{-1} l'application réciproque qui est une application de Y dans X.
Il convient alors de remarquer, pour éviter toute confusion, que
(i) si f n'est pas bijective, f^{-1} est l'application « *image réciproque* » définie sur $\mathfrak{P}(Y)$ et à valeurs dans $\mathfrak{P}(X)$.
(ii) Si f est bijective, on a deux applications, notées toutes deux f^{-1}; l'une est *l'application réciproque* de f définie sur Y et à valeurs dans X, l'autre est l'application « *image réciproque* » définie sur $\mathfrak{P}(Y)$ et à valeurs dans $\mathfrak{P}(X)$.

Théorème.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et l une application linéaire de E dans F.
(i) L'image par l d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
(ii) L'image réciproque par l d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

(i) Soit E' un sous-espace vectoriel de E.
Si x' et y' sont deux éléments de $l(E')$, il existe deux éléments x et y de E' tels que
$$x' = l(x) \qquad y' = l(y)$$
on en déduit
$$x' + y' = l(x) + l(y) = l(x + y)$$
or
$$x + y \in E'$$
donc
$$x' + y' \in l(E').$$
De même si $\alpha \in K$ on a
$$\alpha x' = \alpha l(x) = l(\alpha x)$$
et comme $\alpha x \in E'$, on obtient $\alpha x' \in l(E')$.
En conclusion $l(E')$ est une partie stable, donc un sous-espace vectoriel, de F.
(ii) Soit F' un sous-espace vectoriel de F.
Si x et y sont deux éléments de $l^{-1}(F')$, $l(x)$ et $l(y)$ appartiennent à F', donc aussi leur somme $l(x) + l(y) = l(x + y)$, ce qui prouve que $x + y$ est un élément de $l^{-1}(F')$.
Si α est un scalaire, on a $l(\alpha x) = \alpha l(x)$ et, comme $l(x) \in F'$,
$$\alpha l(x) \in F', \quad \text{d'où} \quad \alpha x \in l^{-1}(F').$$
En conclusion $l^{-1}(F')$ est une partie stable, donc un sous-espace vectoriel, de E.

b) Image d'une famille génératrice.

Théorème.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice du K-espace vectoriel E et si l est une application linéaire de E dans un K-espace vectoriel F, la famille $\big(l(x_i)\big)_{i \in I}$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel $l(E)$ de F.

En effet, soit y un élément de $l(E)$. Il existe un élément x de E tel que $l(x) = y$.
A x on peut associer au moins une famille de scalaires $(\alpha^i)_{i \in I}$, à support fini, telle que
$$x = \sum_{i \in I} \alpha^i x_i,$$
de la linéarité de l on déduit $y = l(x) = \sum_{i \in I} \alpha^i l(x_i)$.

Tout élément de $l(E)$ étant combinaison linéaire des $l(x_i)$, la famille $(l(x_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $l(E)$.

EXERCICE

3. Montrer que, si E est un espace vectoriel de dimension finie et l une application linéaire de E dans un espace vectoriel F, $l(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

c) Image d'une famille libre.

En général l'image d'une famille libre par une application linéaire n'est pas libre. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer des applications linéaires particulières et, par exemple, la plus triviale, à savoir l'application nulle. On a cependant un résultat intéressant.

Théorème.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et l une application linéaire de E dans F. Alors l est injective si et seulement si l'image par l de toute famille libre d'éléments de E est une famille libre d'éléments de F.

Le résultat se présente sous la forme d'une équivalence « A $\Longleftrightarrow$ B »; pour le démontrer, nous établirons successivement les implications

$$\text{« A} \Longrightarrow \text{B »} \quad \text{et} \quad \text{« non A} \Longrightarrow \text{non B »}.$$

Supposons donc d'abord l injective et considérons une famille libre $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E.
Si l'on a

$$\sum_{i\in I} \alpha^i l(x_i) = 0 \quad \text{avec} \quad (\alpha^i)_{i\in I} \in K^{(I)}$$

on peut écrire

$$l\left(\sum_{i\in I} \alpha^i x_i\right) = 0$$

et d'après l'injectivité de l, on obtient

$$\sum_{i\in I} \alpha^i x_i = 0.$$

Comme $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre on a $\forall i \in I\ \alpha^i = 0$, ce qui montre que $(l(x_i))_{i\in I}$ est une famille libre de F.
Si nous supposons maintenant que l n'est pas injective, cela signifie qu'il existe un élément non nul x de E tel que $l(x) = 0$.
Considérons alors la famille $(x_i)_{i\in\{1\}}$, indexée par $\{1\}$ et telle que $x_1 = x$; elle est libre puisque $x_1 \neq 0$ mais son image $(l(x_i))_{i\in\{1\}}$ n'est pas une famille libre puisque $l(x_1) = 0$.

Considérons maintenant une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E telle que son image $(l(x_i))_{i\in I}$ soit une famille libre d'éléments de F.

Si l'on a

$$\sum_{i\in I} \alpha^i x_i = 0 \quad \text{avec} \quad (\alpha^i)_{i\in I} \in K^{(I)},$$

on en déduit

$$l\left(\sum_{i\in I} \alpha^i x_i\right) = \left(\sum_{i\in I} \alpha^i l(x_i)\right) = 0$$

et, comme la famille $(l(x_i))_{i\in I}$ est libre, on obtient

$$\forall i \in I \quad \alpha^i = 0.$$

En conclusion nous avons montré :

Théorème.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et l une application linéaire de E dans F. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E dont l'image $(l(x_i))_{i\in I}$ est une famille libre d'éléments de F, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est elle-même une famille libre.

---

d) Image d'une base.

Théorème.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et l une application linéaire de E dans F. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) l est un isomorphisme
(ii) l'image par l de toute base de E est une base de F
(iii) il existe une base de E dont l'image par l est une base de F.

On va montrer les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii), (ii) $\Longrightarrow$ (iii), (iii) $\Longrightarrow$ (i).
(i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit B une base de E. l étant surjective, $l(B)$ est une partie génératrice de F (d'après *b*); l étant injective, $l(B)$ est une partie libre de F (d'après *c*)). En conclusion $l(B)$ est une base de F.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Évident.
(iii) $\Longrightarrow$ (i). Il existe par hypothèse une base $(e_i)_{i\in I}$ de E telle que $((l(e_i))_{i\in I}$ soit une base de F.
Alors l'application linéaire h de F dans E, telle que

$$\forall i \in I \quad h\left[l(e_i)\right] = e_i,$$

vérifie

$$h \circ l = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad l \circ h = \mathrm{Id}_F$$

et ceci montre que l est un isomorphisme.

EXERCICE

4. *Espaces vectoriels de même dimension.*
Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Montrer que E et F ont même dimension si et seulement si il existe un isomorphisme de E sur F.

1. 15 NOYAU, IMAGE

Définition.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et l une application linéaire de E dans F. On appelle **noyau** de l l'ensemble $l^{-1}(\{0\})$.

Le noyau de l est donc l'ensemble $\{x \mid x \in E, l(x) = 0\}$, c'est le sous-espace vectoriel de E, image réciproque par l du sous-espace vectoriel $\{0\}$ de F. On le note Ker l.

Théorème.

Une application linéaire l de E dans F est injective si et seulement si Ker $l = \{0\}$.

En effet, nous avons vu, comme conséquence de la définition, au paragraphe 1.12 que l'on a :

$$l \text{ injective} \Longleftrightarrow (\{x \mid x \in E, l(x) = 0\} = \{0\}).$$

Nous savons, par ailleurs, que l'image de l, notée $l(E)$ ou Im l, est un sous-espace vectoriel de F. Le théorème suivant va préciser le lien entre Ker l et Im l.

Théorème.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et l une application linéaire de E dans F.
La restriction de l à tout supplémentaire de Ker l est un isomorphisme de ce supplémentaire sur Im l.

Notons E' un supplémentaire de Ker l dans E et l' la restriction de l à E' (autrement dit l' est l'application de E' dans F définie par : $\forall x \in E' \quad l'(x) = l(x)$).
Nous allons montrer que l' est une bijection de E' sur Im l :

- l' est injective. En effet $\operatorname{Ker} l' = \{x \mid x \in E' \ l'(x) = 0\}$
$$= E' \cap \operatorname{Ker} l$$
et comme E' et Ker l sont supplémentaires, on a $E' \cap \operatorname{Ker} l = \{0\}$ d'où $\operatorname{Ker} l' = \{0\}$.
- l' est surjective. Soit $y \in \operatorname{Im} l$; il existe donc un élément x de E tel que $y = l(x)$.

Comme $E = E' \oplus \operatorname{Ker} l$ on a $x = x' + x''$
avec $x' \in E'$, $x'' \in \operatorname{Ker} l$.
On en déduit $y = l(x) = l(x') + l(x'') = l(x')$
et par suite $y \in \operatorname{Im} l'$.

Corollaire.

Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie et si l est une application linéaire de E dans un K-espace vectoriel F on a
$$\dim E = \dim \operatorname{Im} l + \dim \operatorname{Ker} l.$$

En conservant les notations du théorème, nous pouvons conclure que $\dim E' = \dim \operatorname{Im} l$ puisque l' est un isomorphisme de E' sur Im l.
Comme, par ailleurs, nous avons vu que tous les supplémentaires de Ker l ont pour dimension $\dim E - \dim \operatorname{Ker} l$, on obtient
$$\dim E - \dim \operatorname{Ker} l = \dim \operatorname{Im} l.$$

EXERCICE

Si l est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) l est injective
(ii) l est surjective
(iii) l est bijective.

III. Exemples d'applications linéaires

1. 16 FORMES LINÉAIRES

Définition.

Soit E un K-espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans K.

Soit $l : E \longrightarrow K$ une forme linéaire non nulle. Il existe donc $x \in E$ tel que $l(x) \neq 0$; alors si $a \in K$ on a
$$l\left(\frac{a}{l(x)}\, x\right) = a$$
ce qui prouve que l est surjective.

On en déduit $\dim \operatorname{Im} l = \dim K = 1$ et donc que : tout supplémentaire de Ker l est de dimension 1, autrement dit est une droite vectorielle.

Définition.

Soit E un espace vectoriel. On dit qu'un sous-espace vectoriel H de E est un **hyperplan vectoriel** si tout supplémentaire de H est de dimension 1.

EXERCICE

1. Montrer que si H est un hyperplan vectoriel de E et D une droite vectorielle non contenue dans H, on a
$$E = H \oplus D.$$
Indication : on vérifiera d'abord que la somme $H + D$ est directe, puis on montrera par l'absurde que $H \oplus D = E$ (sinon il existerait un sous-espace vectoriel D' de E non réduit à $\{0\}$ et tel que $(H \oplus D) \oplus D' = E$. Que pourrait-on dire de $\dim (D \oplus D')$?).

Nous pouvons énoncer :

Théorème.

Si E est un espace vectoriel et l une forme linéaire non nulle sur E, Ker l est un hyperplan de E.

Nous allons démontrer réciproquement :

Théorème.

Dans un espace vectoriel, tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire.

En effet, soit H un hyperplan de E et D un supplémentaire de H. D étant une droite vectorielle, si x_0 est un vecteur non nul de D, $\{x_0\}$ est une base de D et on a
$$D = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in K\}.$$
On en déduit que tout élément x de E s'écrit de manière unique
$$x = x_1 + \alpha x_0 \quad \text{où} \quad x_1 \in H.$$
Alors l'application l de E dans K, définie par $l(x) = \alpha$, est une forme linéaire ayant H pour noyau.

EXERCICE

2. Montrer que deux formes linéaires qui ont même noyau sont proportionnelles.

1. 17 HOMOTHÉTIES VECTORIELLES

Définition.

Soit E un K-espace vectoriel. Pour tout scalaire non nul α, on appelle **homothétie de rapport** α l'endomorphisme h_α de E défini par
$$\forall x \in E \quad h_\alpha(x) = \alpha x.$$

On désignera par $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des homothéties vectorielles de E.

Théorème.

L'application h de K^* dans $\mathcal{L}(E, E)$, qui à α associe h_α, est un homomorphisme pour les lois $\times$ et $\circ$, autrement dit on a :

$$\forall (\alpha, \beta) \in K^* \times K^* \qquad h_{\beta\alpha} = h_\beta \circ h_\alpha.$$

De plus, si $E \neq \{0\}$, h est une bijection de K^* sur $\mathcal{H}(E)$.

Pour tout couple de scalaires non nuls (α, β) on a

$$\forall x \in E \qquad h_{\beta\alpha}(x) = (\beta\alpha)x$$
$$= \beta(\alpha x)$$
$$= \beta(h_\alpha(x))$$
$$= h_\beta \circ h_\alpha(x)$$

d'où
$$h_{\beta\alpha} = h_\beta \circ h_\alpha.$$

Si $h_\alpha = h_\beta$ on a $\forall x \in E \quad \alpha x = \beta x$. E n'étant pas réduit à $\{0\}$ on en déduit

$$\exists x \quad x \neq 0 \quad (\alpha - \beta)x = 0 \quad \text{d'où} \quad \alpha - \beta = 0.$$

L'application h est donc injective; son image étant $\mathcal{H}(E)$, on a bien une bijection de K^* sur $\mathcal{H}(E)$.

Corollaire.

$\mathcal{H}(E)$ est, pour la composition des applications, un sous-groupe de $GL(E)$ isomorphe au groupe multiplicatif K^*.

En effet, h est un homomorphisme bijectif du groupe multiplicatif K^* sur $\mathcal{H}(E)$ muni de la loi $\circ$; donc, pour cette loi, $\mathcal{H}(E)$ est un groupe et par conséquent un sous-groupe de $GL(E)$.

Caractérisation des homothéties.

Soit h_α l'homothétie de E de rapport α. Si D est une droite vectorielle de E on a $h_\alpha(D) = D$ puisque, si x est un vecteur non nul de D, on a

$$D = \{\beta x \mid \beta \in K\} \quad \text{et} \quad h_\alpha(D) = \{\alpha\beta x \mid \beta \in K\}.$$

En conclusion, une homothétie vectorielle de E laisse les droites vectorielles globalement invariantes.

Réciproquement, considérons un endomorphisme l de E qui laisse toutes les droites vectorielles globalement invariantes, c'est-à-dire tel que :

pour toute droite vectorielle D, $l(D) = D$.

Soit x un vecteur non nul de E et D_x la droite vectorielle $\{\alpha x \mid \alpha \in K\}$; par hypothèse $l(x) \in D_x$ autrement dit il existe un scalaire α_x tel que

$$l(x) = \alpha_x . x.$$

Nous allons montrer que α_x ne dépend pas de x. Soit y un autre vecteur non nul de E.

- Si $y \in D_x$ il existe un scalaire non nul β tel que $y = \beta x$. On a d'une part

$$l(y) = \alpha_y . y = \alpha_y . \beta x$$

et d'autre part

$$l(y) = \beta l(x) = \beta \alpha_x . x$$

d'où
$$\alpha_y \beta x = \beta \alpha_x x$$
et
$$\alpha_y = \alpha_x.$$

- Si $y \notin D_x$ les vecteurs x et y sont linéairement indépendants.

De l'égalité $\quad l(x + y) = l(x) + l(y)$

on déduit

$$\alpha_{x+y}(x + y) = \alpha_x . x + \alpha_y . y$$

soit

$$(\alpha_{x+y} - \alpha_x) x + (\alpha_{x+y} - \alpha_y) y = 0$$

ce qui implique

$$\alpha_{x+y} = \alpha_x = \alpha_y.$$

En conclusion tous les scalaires α_x sont égaux à un même scalaire α. On a évidemment $\alpha \neq 0$, sinon on aurait $l = 0$ et on ne pourrait avoir les égalités $l(D) = D$.

Nous avons démontré :

Théorème.

Soient E un espace vectoriel et l un endomorphisme de E. Alors l est une homothétie vectorielle de E si et seulement si, pour toute droite vectorielle D, on a $l(D) = D$.

1. 18 PROJECTEURS

Soient E un espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On considère l'application p_1 (resp. p_2) de E dans E_1 (resp. E_2) définie de la manière suivante :

tout élément x de E s'écrivant de manière unique

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{avec} \quad x_1 \in E_1 \quad , \quad x_2 \in E_2$$

on pose

$$p_1(x) = x_1 \quad (\text{resp. } p_2(x) = x_2).$$

Définition.

On appelle p_1 (resp. p_2) la **projection de** E **sur** E_1 (resp. E_2) **parallèlement à** E_2 (resp. E_1).

Par définition de p_1 et p_2 on a les relations :

$$\forall x \in E \qquad x = p_1(x) + p_2(x)$$
$$p_1 \circ p_2(x) = 0 \qquad p_2 \circ p_1(x) = 0$$
$$p_1 \circ p_1(x) = p_1(x) \qquad p_2 \circ p_2(x) = p_2(x),$$

ce que l'on exprime, en posant $p_i \circ p_i = p_i^2$, par

(i)	$p_1 + p_2 = \mathrm{Id}_E$
(ii)	$p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$
(iii)	$p_1^2 = p_1, \quad p_2^2 = p_2$

EXERCICE

Étant donnés deux endomorphismes l et h d'un espace vectoriel E, montrer que

$$(l + h)^2 = l^2 + l \circ h + h \circ l + h^2$$

et si l et h commutent,

$$(l + h)^2 = l^2 + 2\, l \circ h + h^2.$$

Calculer plus généralement, λ et μ étant des scalaires, $(\lambda l + \mu h)^2$.

Définition.

Un endomorphisme p d'un espace vectoriel E tel que $p^2 = p$ s'appelle un **projecteur.**

Nous allons voir qu'à tout projecteur p de E on peut associer une décomposition de E en somme de deux sous-espaces supplémentaires, de manière à retrouver la situation décrite au début de ce paragraphe.

Théorème.

Si p est un projecteur de l'espace vectoriel E, $Id_E - p$ est aussi un projecteur de E et E est somme directe de Im p et de Ker p.

On a, en effet,

$$\begin{aligned}(Id_E - p)^2 &= Id_E - 2p + p^2\\ &= Id_E - 2p + p\\ &= Id_E - p\end{aligned}$$

donc $Id_E - p$ est un projecteur.

Montrons maintenant que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.

• On a, en effet, d'une part $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$:

$$\forall x \in E \qquad x = p(x) + (Id_E - p)(x)$$

or $\qquad p(x) \in \operatorname{Im} p \quad$ et $\quad (Id_E - p)(x) \in \operatorname{Ker} p$

car $\qquad p \circ (Id_E - p) = p - p^2 = 0.$

• On a d'autre part $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p = \{0\}$:

car si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ et on a $p(x) = 0$; on en déduit

$$p^2(y) = p(y) = x = 0.$$

REMARQUE

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im}(Id_E - p)$$
et
$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(Id_E - p).$$

1. 19 APPLICATIONS LINÉAIRES INVOLUTIVES OU SYMÉTRIES VECTORIELLES

Dans ce paragraphe, nous supposons le corps K des scalaires de caractéristique différente de 2 (cf. § 1.4).

Définition.

Un endormorphisme s d'un espace vectoriel E est dit **involutif** si $s^2 = Id_E$.

Autrement dit un endomorphisme s de E est involutif si et seulement si s est inversible et si $s^{-1} = s$.

La relation $s^2 = Id_E$ peut encore s'écrire

$$(Id_E + s) \circ (Id_E - s) = 0.$$

Notons E_1 (resp. E_2) l'image de $Id_E + s$ (resp. $Id_E - s$).

On a $E = E_1 + E_2$ puisque tout élément x de E s'écrit

$$x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$$
$$= (Id_E + s)\left(\frac{x}{2}\right) + (Id_E - s)\left(\frac{x}{2}\right).$$

D'autre part $E_1 \cap E_2 = \{0\}$:

remarquons d'abord que, si $x \in E_1$, $s(x) = x$ puisqu'il existe alors y tel que $x = y + s(y)$ et que $\qquad s(x) = s(y) + s^2(y) = s(y) + y;$

de même si $x \in E_2$ on vérifie que $s(x) = -x$.

Considérons alors un élément x de $E_1 \cap E_2$, on doit avoir

$$s(x) = x$$
et
$$s(x) = -x$$

ce qui implique $\qquad x = 0.$

En conclusion E est somme directe de E_1 et E_2 et, si l'on note p_1 et p_2 les projecteurs associés à cette décomposition, on a :

$$\forall x \in E \qquad p_1(x) = \frac{x + s(x)}{2} \qquad p_2(x) = \frac{x - s(x)}{2}$$

d'où $\qquad \forall x \in E \qquad s(x) = p_1(x) - p_2(x)$

c'est-à-dire $\qquad s = p_1 - p_2.$

Ceci s'énonce :

Théorème et définition.

Soit s un endomorphisme involutif d'un espace vectoriel E. On peut associer à s deux sous-espaces vectoriels supplémentaires E_1 et E_2 tels que :

si x, élément de E, s'écrit $x = x_1 + x_2$

où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on a $s(x) = x_1 - x_2$.

On dit que s est la **symétrie vectorielle** par rapport à E_1 (ou de base E_1) et de direction E_2 (ou parallèlement à E_2).

EXERCICES

1. Montrer que, avec les notations précédentes, pour tout vecteur x de E on a

$$s(x) = x \iff x \in E_1$$
$$s(x) = -x \iff x \in E_2.$$

2. Si s' désigne la symétrie par rapport à E_2 de direction E_1 déterminer $s \circ s'$ et $s' \circ s$.

3. E est un espace vectoriel de dimension n (on étudiera d'abord le cas $n = 3$) et E_1, F_1 sont deux sous-espaces vectoriels distincts de E dont la somme des dimensions est strictement supérieure à n.

(i) Montrer qu'il existe au moins un sous-espace vectoriel F_2 (resp. E_2) de E_1 (resp. F_1) qui est un supplémentaire de F_1 (resp. E_1).

(ii) Soit s (resp. s') la symétrie de base E_1 (resp. F_1) et de direction E_2 (resp. F_2). Montrer que $s \circ s' = s' \circ s$ et que cette application est une symétrie vectorielle dont on déterminera la base et la direction.

4. Soient E un espace vectoriel de dimension n et P_1, P_2, P_3 trois de ses sous-espaces vectoriels deux à deux distincts. On pose $Q_1 = P_2 \cap P_3$, $Q_2 = P_3 \cap P_1$, $Q_3 = P_1 \cap P_2$, et on suppose que pour $i = 1, 2, 3$, on a $P_i \oplus Q_i = E$, et on désigne par s_i la symétrie de base P_i et de direction Q_i.

(i) On suppose $n = 3$. Que peut-on dire des applications $s_a \circ s_b \circ s_c$, où (a, b, c) est une permutation de $(1, 2, 3)$?

(ii) Le résultat obtenu en (i) est-il valable quel que soit n? (On pourra montrer d'abord que $E = Q_1 \oplus Q_2 \oplus Q_3$).

(iii)* Peut-on généraliser le résultat (ii), au cas de p sous-espaces tels que chacun d'eux admette l'intersection de tous les autres comme supplémentaire. Quelle condition ceci impose-t-il à p?

IV. Représentation matricielle

Par souci de brièveté, la question est traitée dans le texte pour deux espaces dont les dimensions sont appelées n et p. Le lecteur est invité à considérer sans frayeur les notations générales, qui ont le mérite d'être précises et condensées, et à faire immédiatement tous les exercices très faciles qui sont proposés et où n et p prennent les valeurs 2 ou 3.

1. 20 MATRICES

Considérons un K-espace vectoriel E (resp. F) de dimension n (resp. p) inférieure ou égale à 3 et $(e_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ (resp. $(f_j)_{j \in \{1,\dots,p\}}$) une base de E (resp. F).

On a vu qu'une application linéaire l de E dans F est parfaitement déterminée par la donnée des $l(e_1), \dots, l(e_n)$. Par suite, si on désigne par

$$(\alpha_i^j)_{j \in \{1,\dots,p\}}$$

la famille des coordonnées de $l(e_i)$ dans la base $(f_j)_{j \in \{1,\dots,p\}}$ l'application linéaire l est complètement définie par la famille

$$(\alpha_i^j)_{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\}}.$$

Il est commode de représenter une telle famille, indexée par le produit cartésien $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$, sous forme d'un tableau :

Définition.

Le tableau $\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^p & \cdots & \alpha_n^p \end{pmatrix}$ à p lignes et n colonnes est une **matrice** de type (p, n).

Les scalaires α_i^j sont les **coefficients** de la matrice.

Insistons sur le fait que α_i^j est la $j^{ième}$ coordonnée dans la base $(f_j)_{j \in J}$ de l'image $l(e_i)$ de e_i. La $i^{ième}$ colonne donne donc les coordonnées du vecteur $l(e_i)$ dans la base $(f_j)_{j \in J}$. On dit que cette matrice est la matrice de l'application linéaire l dans les bases $(e_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ et $(f_j)_{j \in \{1,\dots,p\}}$; on la note M (l).

Lorsque E = F la matrice représentant un endomorphisme l de E est de type (n, n), on dit que c'est une *matrice carrée* d'ordre n.

Théorème.

Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Si $(e_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ et $(f_j)_{j \in \{1,\dots,p\}}$ sont des bases de E et F respectivement, l'application M de $\mathcal{L}(E, F)$ dans l'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}$ (K) des matrices de type (p, n) qui, à une application linéaire l de E dans F, associe sa matrice M(l) dans les bases $(e_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ et $(f_j)_{j \in \{1,\dots,p\}}$ est une bijection.

Ce résultat est une conséquence immédiate de la définition de M.

REMARQUE

Nous avons dit plus haut que le tableau $\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^p & \cdots & \alpha_n^p \end{pmatrix}$ est une manière de représenter la famille $(\alpha_i^j)_{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\}}$.

Il en résulte qu'il existe une bijection de $\mathcal{M}_{p,n}$ (K) sur l'ensemble des applications de $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$ dans K.

Définition.

Soit A = $\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^p & \cdots & \alpha_n^p \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{p,n}$.

Les n éléments $(\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^p), \dots, (\alpha_n^1, \dots \alpha_n^p)$ de K^p sont appelés **vecteurs colonnes** de A.

Par commodité, on représente souvent les vecteurs colonnes de A par les matrices de $\mathcal{M}_{p,1}$ (K) suivantes :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \vdots \\ \alpha_1^p \end{pmatrix}, \quad \dots \quad, \begin{pmatrix} \alpha_n^1 \\ \vdots \\ \alpha_n^p \end{pmatrix}.$$

Lorsque A est la matrice d'une application linéaire l de E dans F dans les bases $(e_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ et $(f_j)_{j \in \{1,\dots,p\}}$ nous avons vu que le $i^{ième}$ vecteur colonne de A est représenté par le tableau

$$\begin{pmatrix} \alpha_i^1 \\ \vdots \\ \alpha_i^p \end{pmatrix}$$

où $\alpha_i^1, \dots \alpha_i^p$ sont les coordonnées de $l(e_i)$ dans la base $(f_j)_{j \in \{1,\dots,p\}}$.

EXEMPLE

Supposons que $n = 2$, $p = 3$, $K = \mathbb{R}$ et que l'on ait

$$l(e_1) = f_1 - f_2 + 3 f_3$$
$$l(e_2) = 2 f_1 - f_3 ,$$

alors la matrice de l dans les bases (e_1, e_2) et (f_1, f_2, f_3) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICES

Déterminer la matrice de l'application linéaire l de E dans F dans les bases $(e_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ et $(f_j)_{j\in\{1,\ldots,p\}}$ lorsque :

1. $n = p = 2,\quad K = \mathbb{R},$
   $l(e_1) = 2f_1 + 3f_2$
   $l(e_2) = f_1 - f_2$

2. $n = 3,\ p = 2,\quad K = \mathbb{R},$
   $l(e_1) = f_1 + f_2$
   $l(e_2) = 3f_1$
   $l(e_3) = f_1 - f_2$

3. $n = p = 3,\quad K = \mathbb{R},$
   $l(e_1) = f_1 - f_2 + f_3$
   $l(e_2) = 2f_1 + f_2$
   $l(e_3) = -f_1 + 2f_2 + 3f_3.$

1. 21 OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

Nous conservons les notations du paragraphe précédent.

Nous avons vu que l'application M de $\mathcal{L}$ (E, F) dans $\mathcal{M}_{p,n}$ (K) est une bijection, donc nous pouvons par cette bijection transporter à $\mathcal{M}_{p,n}$ (K) les opérations définies sur $\mathcal{L}$ (E, F) et munir ainsi $\mathcal{M}_{p,n}$ (K) d'une structure d'espace vectoriel sur K, pour laquelle M est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On obtient :

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^p & \cdots & \alpha_n^p\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta_1^1 & \cdots & \beta_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \beta_1^p & \cdots & \beta_n^p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1^1 + \beta_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 + \beta_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^p + \beta_1^p & \cdots & \alpha_n^p + \beta_n^p\end{pmatrix}$$

et si $\beta \in K$

$$\beta\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^p & \cdots & \alpha_n^p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\alpha_1^1 & \cdots & \beta\alpha_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \beta\alpha_1^p & \cdots & \beta\alpha_n^p\end{pmatrix}.$$

Considérons un troisième K-espace vectoriel G de dimension q ($q \leqslant 3$) et $(g_k)_{k\in\{1,\ldots,q\}}$ une base de G.

De l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) &\longrightarrow \mathcal{L}(E, G)\\ (l, h) &\longmapsto h \circ l\end{aligned}$$

on déduit, par bijection, une application

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{p,n}(K) \times \mathcal{M}_{q,p}(K) &\longrightarrow \mathcal{M}_{q,n}(K)\\ (M(l), M(h)) &\longmapsto M(h \circ l).\end{aligned}$$

Par définition M $(h \circ l)$ est le produit des matrices M (h) et M (l) et est noté M (h) . M (l) (attention à l'ordre qui est celui de la composition des applications).

Si $\quad M(l) = \begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^p & \cdots & \alpha_n^p\end{pmatrix}$ et $M(h) = \begin{pmatrix}\beta_1^1 & \cdots & \beta_p^1\\ \vdots & & \vdots\\ \beta_1^q & \cdots & \beta_p^q\end{pmatrix}$

on a

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \qquad l(e_i) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_i^j f_j$$

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, p\} \qquad h(f_j) \sum_{k=1}^{p} \beta_j^k g_k$$

d'où

$$\begin{aligned}\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \qquad h \circ l(e_i) &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_i^j\, h(f_j)\\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_i^j \left(\sum_{k=1}^{q} \beta_j^k g_k\right)\\ &= \sum_{\substack{j\in\{1,\ldots p\}\\ k\in\{1,\ldots q\}}} \alpha_i^j \beta_j^k g_k\\ &= \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_i^j \beta_j^k\right) g_k.\end{aligned}$$

Par suite, si on pose

$$M(h \circ l) = \begin{pmatrix}\gamma_1^1 & \cdots & \gamma_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \gamma_1^q & \cdots & \gamma_n^q\end{pmatrix}$$

on a

$$\boxed{\begin{matrix}\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}\\ \forall\, k \in \{1, \ldots, q\}\end{matrix} \qquad \gamma_i^k = \sum_{j=1}^{p} \alpha_i^j \beta_j^k}$$

donc on obtient l'élément de la $k^{\text{ième}}$ ligne et de la $i^{\text{ième}}$ colonne du produit M (h) . M (l) à l'aide des éléments de la $k^{\text{ième}}$ ligne de M (h) et de la $i^{\text{ième}}$ colonne de M (l) : on fait les produits des termes de même rang et puis la somme des produits obtenus.

EXEMPLE

On suppose que $n = \dim E = 2$, $p = \dim F = 2$, $q = \dim G = 3$, $K = \mathbb{R}$, et que

$$\begin{aligned}l(e_1) &= f_1 - f_2\\ l(e_2) &= 2f_1 + 3f_2\ ,\\ h(f_1) &= g_1 - g_3\\ h(f_2) &= 2g_2 + g_3\ .\end{aligned}$$

On a donc

$$M(l) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M(h) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix};$$

en utilisant la règle précédente on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0 \times (-1) & 1 \times 2 + 0 \times 3 \\ 0 \times 1 + 2 \times (-1) & 0 \times 2 + 2 \times 3 \\ -1 \times 1 + 1 \times (-1) & -1 \times 2 + 1 \times 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous laissons le lecteur vérifier que l'on a bien

$$h \circ l(e_1) = g_1 - 2g_2 - 2g_3$$
$$h \circ l(e_2) = 2g_1 + 6g_2 + g_3.$$

EXERCICE

Calculer les produits suivants ($K = \mathbb{R}$) :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$
2. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$
3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

REMARQUE

Si E = F = G la bijection M nous permet de munir $\mathcal{M}_{n,n}$ d'une structure d'anneau (non commutatif) et M est alors un isomorphisme d'anneaux de $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ sur $\mathcal{L}(E, E)$; par cet isomorphisme, le groupe linéaire de E correspond au sous-groupe de $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ constitué des matrices inversibles.

1. 22 APPLICATIONS

a) Représentation matricielle de $x \longmapsto l(x)$.

Si x est un élément de E on note $\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^p \end{pmatrix}$) la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}$ (resp. $\mathcal{M}_{p,1}$) dont les coefficients sont les coordonnées de x (resp. $l(x)$) dans la base $(e_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ (resp. $(f_j)_{j \in \{1,\dots,p\}}$).

On a donc

$$x = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i$$

et par suite

$$l(x) = \sum_{i=1}^{n} a^i \, l(e_i) \quad ,$$

alors si

$$M(l) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots\dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^p & \dots\dots & \alpha_n^p \end{pmatrix}$$

on a

$$\forall i \in \{1, \dots n\} \qquad l(e_i) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_i^j f_j$$

d'où

$$l(x) = \sum_{i=1}^{n} a^i \left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_i^j f_j \right)$$
$$= \sum_{\substack{i \in \{1,\dots,n\} \\ j \in \{1,\dots,p\}}} a^i \alpha_i^j f_j$$
$$= \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a^i \alpha_i^j \right) f_j$$

on en déduit que

$$\forall j \in \{1, \dots, p\} \qquad b^j = \sum_{i=1}^{n} a^i \alpha_i^j$$

et on peut écrire ceci de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots\dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^p & \dots\dots & \alpha_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

autrement dit :

Théorème.

Soient E et F des K-espaces vectoriels et l une application linéaire de E dans F. Si $(e_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ et $(f_j)_{j \in \{1,\dots,p\}}$ sont des bases de E et F respectivement, alors, pour tout élément x de E, la matrice colonne des coordonnées de $l(x)$ dans la base $(f_j)_{j \in \{1,\dots,p\}}$ est le produit de la matrice de l dans ces bases et de la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$.

EXEMPLE 1

Nous reprenons les hypothèses de l'exercice nº 3 du paragraphe 1.20. Si a^1, a^2, a^3 désignent les coordonnées d'un vecteur x de E et b^1, b^2 les coordonnées de $l(x)$ on a

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$b^1 = a^1 + 3a^2 + a^3$$
$$b^2 = a^1 - a^3.$$

EXEMPLE 2

Supposons que l'on ait dim E = 3, dim F = 3, $K = \mathbb{R}$ et soit l l'application linéaire de E dans F qui, au point x, de coordonnées a^1, a^2, a^3, associe le point $l(x)$, de coordonnées b^1, b^2, b^3 telles que :

$$b^1 = 2a^1 + a^3$$

$$b^2 = a^1 + 4\,a^2 - a^3$$
$$b^3 = a^2 + 2\,a^3$$

alors on a

$$\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

et la matrice de l est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi remarquer que
e_1 ayant pour coordonnées (1, 0, 0), $l(e_1)$ a pour coordonnées (2, 1, 0)
e_2 ayant pour coordonnées (0, 1, 0), $l(e_2)$ a pour coordonnées (0, 4, 1)
e_3 ayant pour coordonnées (0, 0, 1), $l(e_3)$ a pour coordonnées (1, − 1, 2)
et donc que les vecteurs colonnes de la matrice de l sont

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mais il est plus rapide de procéder de la façon précédente.

EXERCICES

1. $\dim E = 2$, $\dim F = 3$, $K = \mathbb{R}$.
Soit l l'application linéaire de E dans F définie par

$$b^1 = a^1 - a^2$$
$$b^2 = 2\,a^1 + 3\,a^2$$

Écrire la matrice de l.

2. Même question avec $\dim E = 2$, $\dim F = 3$ et

$$b^1 = 3\,a^1 + a^2$$
$$b^2 = -\,a^1 + 2\,a^2$$
$$b^3 = a^1 - 5\,a^2.$$

b) Changement de bases.

Considérons maintenant la situation suivante :

• E est un espace vectoriel de dimension n ($n \leqslant 3$) et $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, $(e'_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ sont deux bases de E.

• F est un espace vectoriel de dimension p ($p \leqslant 3$) et $(f_j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$, $(f'_j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$ sont deux bases de F.

• l est une application linéaire de E dans F.
On note M (resp. M′) la matrice de l dans les bases $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ et $(f_j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$ (resp. $(e'_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ et $(f'_j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$) et on se propose d'établir une relation entre M et M′.
On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_{(e_i)} & \xrightarrow{\;l\;} & F_{(f_j)} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_E} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_F} \\ E_{(e'_i)} & \xrightarrow[\;l\;]{} & F_{(f'_j)} \end{array}$$

(dire que le diagramme est commutatif signifie que l'on a $\mathrm{Id}_F \circ l = l \circ \mathrm{Id}_E$).

Désignons par P la matrice de Id_E dans les bases $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ et $(e'_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ et par Q la matrice de Id_F dans les bases $(f_j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$ et $(f'_j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$. Refaisons le diagramme en indiquant, au lieu des applications, les matrices les représentant dans les bases indiquées :

$$\begin{array}{ccc} E_{(e_i)} & \xrightarrow{\;M\;} & F_{(f_j)} \\ {\scriptstyle P}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle Q} \\ E_{(e'_i)} & \xrightarrow[\;M'\;]{} & F_{(f'_j)} \end{array}$$

on a alors

$$Q.M = M'.P$$

d'où, P étant inversible puisque matrice d'un isomorphisme,

$$\boxed{M' = Q.M.P^{-1}}.$$

Remarquons que P a pour vecteurs colonnes les coordonnées des e_i dans la base $(e'_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ et que, P^{-1} étant la matrice de Id_E dans les bases $(e'_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ et $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, P^{-1} a pour vecteurs colonnes les coordonnées des e'_i dans la base $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$.

REMARQUE

Nous déconseillons au lecteur d'essayer de retenir par cœur la formule $M' = Q\,.\,M\,.\,P^{-1}$; il la retrouvera aisément et rapidement en utilisant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_{(e_i)} & \xrightarrow{\;M\;} & F_{(f_j)} \\ {\scriptstyle P}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle Q} \\ E_{(e'_i)} & \xrightarrow[\;M'\;]{} & F_{(f'_j)} \end{array}$$

et évitera ainsi toute erreur sur la signification de P et de Q.

EXERCICE

3. *Nous conservons les notations précédentes.*
Soit x un vecteur de E de coordonnées $(a^i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ dans la base $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ et $(a'^i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ dans la base $(e'_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$.
On note

$$X = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} \qquad X' = \begin{pmatrix} a'^1 \\ \vdots \\ a'^n \end{pmatrix}$$

les matrices colonnes correspondantes.
Montrer que

$$X' = PX.$$

Désignons par $(b^j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$ les coordonnées de $l(x)$ dans la base $(f_j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$ et par $(b'^j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$ celles dans la base $(f'_j)_{j\in\{1,\dots,p\}}$.
Si

$$Y = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^p \end{pmatrix} \qquad Y' = \begin{pmatrix} b'^1 \\ \vdots \\ b'^p \end{pmatrix}$$

on a de même

$$Y' = QY.$$

En déduire, en utilisant la relation $Y = MX$, une relation entre Y′ et X′ et retrouver ainsi que l'on a

$$M' = Q.M.P^{-1}.$$

EXERCICES

1.1 Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble X (c'est-à-dire une application de I dans $\mathcal{P}(X)$).
On pose

et
$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in X_i\}$$
$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in X_i\}.$$

Ces deux ensembles seront appelés respectivement intersection et réunion de la famille $(X_i)_{i\in I}$.

1° Montrer que
$$\complement \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} \complement X_i.$$

2° Si I est égal au produit cartésien J × K, montrer que
$$\bigcup_{(j,k)\in J\times K} X_{j,k} = \bigcup_{j\in J}\Big(\bigcup_{k\in K} X_{jk}\Big) = \bigcup_{k\in K}\Big(\bigcup_{j\in J} X_{jk}\Big).$$

A-t-on une formule analogue pour les intersections?

3° Montrer que
$$\Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j\in J} X_j\Big) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cap X_j).$$

Obtient-on une formule vraie en intervertissant le rôle des signes $\cap$ et $\cup$?

4° Montrer que l'on a pour la famille $(X_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ indexée par un produit cartésien I × J, les formules suivantes
$$\bigcup_{j\in J}\Big(\bigcap_{i\in I} X_{ij}\Big) \subset \bigcap_{i\in I}\Big(\bigcup_{j\in J} X_{ij}\Big).$$
$$\bigcap_{i\in I}\Big(\bigcup_{j\in J} X_{ij}\Big) = \bigcup_{f\in\mathcal{F}(I,J)}\Big(\bigcap_{i\in I} X_{i,f(i)}\Big)$$

où $\mathcal{F}$ (I, J) désigne l'ensemble des applications de I dans J.
Montrer que la dernière formule contient comme cas particulier la formule démontrée au 3°, dans le cas où I = J dans cette dernière formule.

1.2 On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs
$$x_1 = (2, 3, 1) \qquad x_2 = (1, -1, -2)$$
$$x_3 = (3, 7, 0) \qquad x_4 = (5, 0, 7).$$

Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par x_1 et x_2 et le sous-espace vectoriel engendré par x_3 et x_4 sont identiques. De quelle dimension est-il?
Compléter la famille libre (x_1, x_2) pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

1.3 Soient E un espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
Montrer que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

1.4 Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un espace vectoriel E.
On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre et s'il n'existe pas de famille libre distincte de $(x_i)_{i\in I}$ dont $(x_i)_{i\in I}$ soit une sous-famille.
On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice et si toute sous-famille de $(x_i)_{i\in I}$ distincte de $(x_i)_{i\in I}$ n'est pas génératrice.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) $(x_i)_{i\in I}$ est une base;
(2) $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale;
(3) $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale.

1.5 Soient E un K-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
On considère l'application
$$f : K^{(I)} \longrightarrow E$$
$$(\alpha^i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} \alpha^i x_i$$

1° Montrer que f est linéaire.
2° Montrer que f est injective si et seulement si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.
3° Montrer que f est bijective si et seulement si $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E.

1.6 1° Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments d'un K-espace vectoriel, montrer que l'application
$$\varphi : K^{(I)} \longrightarrow E$$
$$(\alpha^i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} \alpha^i x_i$$

est linéaire.
2° Montrer réciproquement, qu'à toute application linéaire φ de $K^{(I)}$ dans E on peut associer une unique famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E telle que
$$\forall (\alpha^i)_{i\in I} \in K^{(I)} \qquad \varphi((\alpha_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \alpha^i x_i.$$

3° En déduire qu'il existe un isomorphisme canonique de K-espaces vectoriels de $\mathcal{L}$ $(K^{(I)}, E)$ sur $\mathcal{F}$ (I, E).

1.7 Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$).
On considère la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f_n(t) = e^{\lambda_n t}$$

où $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels (i.e. un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).
Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre si et seulement si les λ_n sont tous distincts.
(Indication : pour montrer que la condition est suffisante on pourra écrire
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \alpha^1 f_1(t) + \ldots + \alpha_n f_n(t) = 0,$$
diviser par $f_n(t)$, puis dériver.)

1.8 Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$) la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
où
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \cos nx$$
est une famille libre.
(Indication : on supposera que l'on a une combinaison linéaire nulle $\sum_{i\in I} \alpha^i \cos n_i x = 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, où I est une partie finie de $\mathbb{N}$. On pourra ensuite soit calculer pour $p \in \mathbb{N}$
$$\int_0^{2\pi} \Big(\cos px \sum_{i\in I} \alpha^i \cos n_i x\Big)\, dx \quad ,$$
soit dériver deux fois l'égalité $\sum_{i\in I} \alpha_i \cos n_i x = 0$ et raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Conclure dans les deux cas que $\forall i \in I \quad \alpha^i = 0$.)

1.9 Montrer que dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

où $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P_n(x) = x^n \quad ,$$

est une famille libre.

(Indication : supposer que l'on a $\sum_{i \in I} \alpha^i P_{n_i} = 0$ où I est une partie finie de $\mathbb{N}$ et où les n_i sont classés par ordre croissant.

On en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i \in I} \alpha^i x^{n_i} = 0.$$

Supposer $x \neq 0$, diviser par x^p où $p = \inf\{n_i \mid i \in I\}$ et prendre la limite de l'expression obtenue au point $x = 0$.)

1.10 Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des K-espaces vectoriels, montrer que la structure d'espace vectoriel dont on a muni $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans l'exemple 2 du § 1.4 est l'unique structure d'espace vectoriel de $E_1 \times \ldots \times E_n$ pour laquelle toutes les projections p_i, $i = 1, \ldots, n$, sont linéaires.

1.11 Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E.
On note $\prod_{i \in I} E_i$ la partie de E^I $(= \mathcal{F}(I, E))$ ayant pour éléments les familles $x = (x_i)_{i \in I}$ de E^I telles que $\forall i \in I \quad x_i \in E_i$.
Montrer que pour les lois

$$x + y = (x_i + y_i)_{i \in I}$$
$$\alpha . x = (\alpha x_i)_{i \in I} \quad \text{où} \quad \alpha \in K$$

$\prod_{i \in I} E_i$ est un K-espace vectoriel.

1.12 E_1 et E_2 désignant deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, montrer que la somme $E_1 + E_2$ est directe si et seulement si l'application

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 &\longrightarrow E_1 + E_2 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 + x_2 \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels ($E_1 \times E_2$ étant muni de la structure d'espace vectoriel définie dans l'exemple 2 du § 1.4). Généraliser à un n-uplet $E_1, \ldots, E_n$ de sous-espaces de E.

1.13 Soit E un espace vectoriel, V un sous-espace vectoriel de E, W_1 et W_2 deux supplémentaires de V. Montrer que la restriction à W_2 de la projection sur W_1 parallèlement à V est un isomorphisme de W_2 sur W_1.
Que peut-on en déduire pour les dimensions de deux supplémentaires d'un même sous-espace d'un espace de dimension finie?

1.14 Soit E un espace vectoriel sur un corps K de caractéristique différente de 2.
On considère deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 de E et la symétrie s par rapport à E_1 de direction E_2.
Montrer que l'image x' de x par s est caractérisée par

- $x' - x \in E_2$
- $x' + x \in E_1$.

1.15 *On illustrera l'étude qui suit au moyen de figures faites en supposant que* E *est un espace vectoriel de dimension* 3 *sur* $\mathbb{R}$.
Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E, et v un vecteur de E n'appartenant pas à H.
1° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-espace soit un supplémentaire de H dans E est qu'il ait une base de la forme $v + u$, où $u \in H$.
En déduire l'existence d'une bijection de H sur l'ensemble des supplémentaires de H.

En déduire que si E est de dimension au moins égale à 2 sur un corps infini ($\mathbb{R}$ en particulier), tout sous-espace différent de $\{0\}$ et de E a une infinité de supplémentaires.
2° On suppose que H est de dimension n et que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de H. Montrer que la partie $\{v, v + e_1, \ldots, v + e_n\}$ est une base de E.
Soit l une forme linéaire sur E dont le noyau est H; pour tout vecteur x de E, exprimer $l(x)$ en fonction des coordonnées de x dans la base $\{v, v + e_1, \ldots, v + e_n\}$. Quelle est l'équation de H par rapport à cette base?
3° Soient v et w deux vecteurs distincts n'appartenant pas à H. A quelle condition les deux bases

$$\{v, v + e_1, \ldots, v + e_n\} \quad \text{et} \quad \{w, w + e_1, \ldots, w + e_n\}$$

sont-elles disjointes?
Déterminer les matrices de passage de l'une à l'autre dans le cas où $w = v + e_1 + \ldots + e_n$.

1.16 Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On désigne par $\mathcal{F}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.
La somme de la famille $(E_i)_{i \in I}$ est par définition le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les E_i; on le note $\sum_{i \in I} E_i$. Montrer que l'on a

$$\sum_{i \in I} E_i = \left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid x_i \in E_i, \; J \in \mathcal{F}_f(I) \right\}.$$

On dit que la somme est directe si tout élément de $\sum_{i \in I} E_i$ s'écrit d'une seule manière sous la forme $\sum_{i \in J} x_i$, avec $J \in \mathcal{F}_f(I)$ et $x_i \in E_i$.

On écrira alors $\bigoplus_{i \in I} E_i$, au lieu de $\sum_{i \in I} E_i$.

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est

$$\forall i \in I \qquad E_i \cap \left(\sum_{j \in I - \{i\}} E_j \right) = \{0\}.$$

On suppose I fini; une indexation équivalente de la famille $(E_i)_{i \in I}$ peut être faite avec la section commençante $[1, n]$ de $\mathbb{N}$. Montrer que dans ces conditions, il suffit pour que la somme $\sum_{i \in [1, n]} E_i$ soit directe que l'on ait

$$\forall i \in [1, n-1] \qquad \left(\sum_{j \in [1, i]} E_j \right) \cap E_{i+1} = \{0\}.$$

Donner des exemples de décomposition de l'espace vectoriel E des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en somme directe : c'est-à-dire trouver des familles de sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i \in I}$ telles que $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$.

1.17 Soient E un K-espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.
1° Si $l_1 \in GL(E_1)$ et $l_2 \in GL(E_2)$ montrer que l'application l de E dans lui-même, qui à tout élément $x = x_1 + x_2$ de E (où $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$) associe $l(x) = l_1(x_1) + l_2(x_2)$, est un élément de GL (E).
2° Montrer que l'application de $GL(E_1) \times GL(E_2)$ dans GL (E), qui au couple (l_1, l_2) associe l'application l définie ci-dessus, est un homomorphisme injectif de groupes.
(Remarque : on vérifiera d'abord que $GL(E_1) \times GL(E_2)$ muni de la loi

$$(l'_1, l'_2) \circ (l_1, l_2) = (l'_1 \circ l_1, l'_2 \circ l_2)$$

est un groupe.)

3° Établir, réciproquement, que si un élément l de GL (E) vérifie

$$l(E_1) \subset E_1 \quad \text{et} \quad l(E_2) \subset E_2$$

on peut écrire, de manière unique, pour tout élément $x = x_1 + x_2$ de E (où $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$), $l(x) = l_1(x_1) + l_2(x_2)$ avec $l_1 \in GL(E_1)$ et $l_2 \in GL(E_2)$.

1.18 Soient E et F deux espaces vectoriels et l une application linéaire surjective de E sur F. Construire une application linéaire h de F dans E telle que $l \circ h = Id_F$. Montrer que h est injective.

1.19 Soit E un K-espace vectoriel. Si F et G sont deux K-espaces vectoriels et l une application linéaire de F dans G, on désigne par $\bar{l}$ l'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E, G)$ définie de la manière suivante :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E, F) \qquad \bar{l}(u) = l \circ u.$$

1° Montrer que $\bar{l}$ est linéaire.

2° Lorsque l est injective, montrer que $\bar{l}$ est injective.

3° Si h est une application linéaire de G dans un K-espace vectoriel H, on définit de même l'application $\bar{h}$ de $\mathcal{L}(E, G)$ dans $\mathcal{L}(E, H)$.

Établir que $$\bar{h} \circ \bar{l} = \overline{h \circ l}.$$

4° Montrer que, lorsque Ker h = Im l, on a Ker $\bar{h}$ = Im $\bar{l}$.

1.20 On considère un endomorphisme l d'un espace vectoriel E tel que $l^n = 0$ et $l^{n-1} \neq 0$, pour un entier $n > 1$.

1° Montrer que si x est un vecteur de E n'appartenant pas au noyau de l^{n-1}, les vecteurs $x, l(x), \ldots, l^{n-1}(x)$ sont linéairement indépendants.

2° Montrer que si p est la dimension de E on a

$$n - 1 \leqslant \dim \operatorname{Im} l < p.$$

1.21 On considère l'espace vectoriel E des fonctions polynômes de degré au plus égal à 4, et les sous-espaces E_1, engendré par les polynômes $x \longmapsto x^2 + 1$ et $x \longmapsto x^4 - x$, et E_2, engendré par $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x^4 + x$.

1° La somme $E_1 + E_2$ est-elle directe? En déterminer une base. Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans E.

2° Même question pour les sous-espaces F_1, engendré par $x \longmapsto x^2 + x$ et $x \longmapsto x^4 - x$, et F_2, engendré par $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x^4 + x$.

1.22 Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E.

1° Établir que $\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$.

2° Soit l l'application de $E_1 \times E_2$ dans E qui, au couple (x_1, x_2), associe $x_1 + x_2$.

a) Montrer que l est linéaire.

b) Montrer que Ker $l = \{(x, -x) \mid x \in E_1 \cap E_2\}$. En déduire un isomorphisme de Ker l sur $E_1 \cap E_2$.

c) En utilisant la relation $\dim(E_1 \times E_2) = \dim \operatorname{Im} l + \dim \operatorname{Ker} l$,

retrouver que $$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2).$$

3° Plus généralement, si $E_1, \ldots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E, montrer que $$\dim(E_1 \times \ldots \times E_p) = \dim E_1 + \ldots + \dim E_p,$$

et en considérant l'application

$$l : E_1 \times \ldots \times E_p \longrightarrow E$$
$$(x_1, \ldots, x_p) \longmapsto x_1 + \ldots + x_p$$

conclure que

$$\dim(E_1 + \ldots + E_p) \leqslant \dim E_1 + \ldots + \dim E_p.$$

1.23 Considérons trois espaces vectoriels E, F, G de dimensions finies, l une application linéaire de E dans F, et h une application linéaire de F dans G.
On note n_l, n_h, et $n_{h \circ l}$ les dimensions respectives de Ker l, Ker h et Ker $h \circ l$.

Établir l'inégalité $$n_{h \circ l} \leqslant n_h + n_l.$$

(Indication : on utilisera les égalités

$$\dim E = \dim l(E) + n_l$$

et $$\dim l(E) = \dim h' \circ l(E) + n_{h'}$$

où h' est la restriction de h à $l(E)$, et on établira que $n_{h'} \leqslant n_h$.)

1.24 Étant données deux formes linéaires f_1, f_2 sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on considère l'application F de E dans $\mathbb{R}^2$ qui à tout $x \in E$ fait correspondre $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

1° Montrer que F est linéaire.

2° A quelle condition l'image de F est-elle un sous-espace vectoriel de dimension un.

3° En déduire que si deux formes linéaires f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes dans l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, l'ensemble des éléments x de E qui les annulent toutes les deux est un sous-espace dont les supplémentaires sont de dimension 2.

1.25 Soit E un K-espace vectoriel de dimension n.

1° Considérons un sous-espace vectoriel F de E, de dimension p, et un hyperplan H de E. Montrer, en utilisant l'égalité

$$\dim F + \dim H = \dim(F + H) + \dim(F \cap H),$$

que $F \cap H$ est de dimension p si F est contenu dans H et de dimension $p - 1$ sinon.

2° En déduire que l'intersection de q hyperplans $H_1, \ldots, H_q$ de E est de dimension supérieure ou égale à $n - q$.

1.26 1° L'ensemble E des fonctions trinômes du second degré $(x \longmapsto ax^2 + bx + c)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Quelle est sa dimension?

2° Montrer que la partie de E formée des 3 trinômes qui à x font correspondre respectivement $(x - 1)(x - 2)$, $(x - 3)x$, $x(x - 1)$ est libre.
En déduire que tout trinôme du second degré P peut s'écrire

$$P(x) = \alpha(x - 1)(x - 2) + \beta x(x - 3) + \gamma x(x - 1)$$

où α, β, γ sont des nombres réels que l'on calculera en fonction de P (0), P (1), P (2).

3° x_1, x_2, x_3 étant trois réels deux à deux distincts, on considère les trois trinômes qui, à x, font correspondre respectivement $(x - x_2)(x - x_3)$, $(x - x_3)(x - x_1)$, $(x - x_1)(x - x_2)$. Peut-on, à leur propos, obtenir des résultats analogues à ceux du 2°.

4° Peut-on généraliser les résultats précédents à l'espace des polynômes de degré n?

1.27 Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré au plus égal à n.

1° Montrer que la famille de polynômes

$$(u_k)_{k \in \{0, \ldots, n\}}, \quad \text{où} \quad u_k(x) = x(x - 1) \ldots (x - k + 1),$$

est une base de E.

2° Soit δ l'application de E dans lui-même qui, au polynôme P, associe le polynôme $\delta(P)$ tel que

$$\delta(P)(x) = P(x + 1) - P(x).$$

a) Montrer que δ est une application linéaire.

b) Déterminer les polynômes $\delta(u_k)$, $k \in \{0, \ldots, n\}$. En déduire l'image de δ.

c) Quel est le noyau de δ?

1.28 On considère l'ensemble E des fonctions polynômes. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2° On considère la suite de polynômes définie par

$$P_o(x) = 1 \quad , \quad \dots \quad , \quad P_n(x) = (x - n - 1)\, P_{n-1}(x).$$

Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de E.

3° On considère l'ensemble des polynômes admettant 1 pour racine. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel E_1 de E. Exhiber au moins un supplémentaire de E_1 dans E (ou pourra en donner une base). Quelle est la dimension de ce supplémentaire?

4° On considère l'ensemble E_2 des polynômes admettant 1 et 2 pour racines. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E, dont on exhibera au moins un supplémentaire dans E. Quelle est la dimension de ce supplémentaire?

1.29 On considère l'intervalle $S = [0, 4]$ de $\mathbb{R}$, et l'ensemble E des applications de S dans $\mathbb{R}$ qui sont constantes sur chacun des intervalles ouverts $I_i =]i, i+1[$, $i = 0, 1, 2, 3$.

1° Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$.

2° On désigne par φ_i la fonction qui vaut 1 pour $x \in I_i$, et 0 dans le cas contraire, et par ψ_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) la fonction qui vaut 1 au point j, et 0 en tout autre point.
Montrer que l'ensemble ayant pour éléments les fonctions φ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) et les fonctions ψ_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) est une base de E.

3° Montrer que les parties suivantes de E en sont des parties libres, et les compléter en des bases.

a) L'ensemble des fonctions h_i, $i = 0, 1, 2, 3$, définies par

$$h_i(x) = 1 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x < i$$
$$h_i(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \geqslant i.$$

b) L'ensemble constitué par les fonctions φ_i, $i = 0, 1, 2, 3$, et les fonctions u_i, $i = 0, 1, 2, 3$, définies par

$$u_i(x) = 1 \quad \text{si} \quad i \leqslant x \leqslant i+1$$
$$u_i(x) = 0 \quad \text{dans le cas contraire.}$$

4° Montrer que l'ensemble des fonctions de E qui sont continues à droite est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension?
Exhiber un supplémentaire de ce sous-espace.

5° On considère l'application F de E dans $\mathbb{R}$ qui à toute fonction $f \in E$ associe la somme des valeurs qu'elle prend respectivement sur chacun des intervalles I_i. Montrer que F est linéaire. Quelle est a priori la dimension de son noyau?
Montrer que ce noyau a une base constituée des fonctions ψ_j, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, et des fonctions $\varphi_0 - \varphi_1$, $\varphi_0 + \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$, $\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 - 3\,\varphi_3$, et qu'un de ses supplémentaires est le sous-espace des fonctions constantes.

6° Montrer que pour toute fonction f de E, il existe exactement une fonction $p(f)$ constante telle que $F(f) = F[p(f)]$.
Montrer que p est un projecteur de E. Quelle est son image? Quel est son noyau?
Quel lien y a-t-il entre les questions 5° et 6° et la théorie de l'intégration?

1.30 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1° Calculer A^2, A^3, et montrer par récurrence que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2° Montrer que l'on a $(A - I)^2 = 0$, I étant la matrice unité.
En déduire A^{-1}.

1.31 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1° Calculer A^2, A^3. Donner l'expression de A^n.

2° Vérifier que $A^3 - 3\,A^2 + 3\,A = I$ (où I est la matrice unité). En déduire A^{-1}.

1.32 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3 et montrer par récurrence que

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

1.33 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1° Calculer A^2, A^3.

2° Montrer que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & a_n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\quad a_n = 4\,n + a_{n-1} - 1.$

3° Des égalités

$$a_2 = 4 \times 2 + a_1 - 1$$
$$a_3 = 4 \times 3 + a_2 - 1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = 4\,n + a_{n-1} - 1$$

déduire que $\quad a_n = n\,(2\,n + 1).$

1.34 Soient u_0, v_0, w_0 trois réels donnés.
On définit les réels u_n, v_n, w_n par la relation de récurrence

$$u_n = u_{n-1} + v_{n-1}$$
$$v_n = v_{n-1} + w_{n-1}$$
$$w_n = w_{n-1}$$

et on se propose de calculer u_n, v_n, w_n en fonction de u_0, v_0, w_0.

1° Établir que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

2° On a $\quad A = I + M$
où

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3.
En déduire, en utilisant la formule

$$(I + M)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p M^p \quad ,$$

que

$$A^n = I + nM + \frac{n(n-1)}{2} M^2.$$

3° Calculer u_n, v_n, w_n en fonction de u_0, v_0, w_0.

1.35 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}$ (K) pour laquelle il existe un entier p tel que

$$A^p = 0 \quad \text{et} \quad A^{p-1} \neq 0.$$

Montrer que I − A est inversible et a pour inverse

$$I + A + A^2 + \dots + A^{p-1}.$$

1.36 Montrer que si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}$ (K) telle que les matrices I, A, A^2, …, A^n soient linéairement dépendantes, A est inversible. Déterminer A^{-1} en fonction des puissances de A.

1.37 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit l l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$.

1° Montrer que $l^3 = 0$.

2° Si t est un réel, on note h_t l'endomorphisme $i + tl + \frac{1}{2}t^2l^2$, où i est l'application identique de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que, pour la composition des applications, l'ensemble $\{h_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un groupe abélien. (Indication : on établira que $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2$ on a $h_{t'} \circ h_t = h_{t'+t}$).

3° Soient $e_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $e_2 = l(e_1)$ et $e_3 = l(e_2)$.
Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de l dans cette base?

1.38 Trace d'une matrice.

Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3; on appelle trace de A et on note Tr (A) le scalaire $\alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^3$.

1° Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{M}_{3,3}$ (K) on a

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$$
$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

et lorsque P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_{3,3}$ (K).

$$\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A).$$

2° Montrer que pour toute forme linéaire l sur $\mathcal{M}_{3,3}$ (K) il existe une et une seule matrice A de $\mathcal{M}_{3,3}$ (K) telle que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,3}(K) \qquad l(X) = \text{Tr}(AX).$$

1.39 On désigne par E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \beta & \alpha + \gamma & \beta + \gamma \\ \gamma & \beta & \alpha + \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \alpha, \beta, \gamma \quad \text{sont des réels.}$$

1° Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2° Soient

I la matrice unité,

J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

K la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que {I, J, K} est une base de E.

3° Calculer J^2, JK, KJ, K^2.
Montrer que $J^3 = J + 1$.
En déduire que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_{3,3}$ ($\mathbb{R}$).

1.40 Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}$ ($\mathbb{R}$) des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels, on désigne par M une matrice telle que $M^2 + M = 6\,I$ (I matrice unité)
et que $M \neq 2\,I$, $M \neq -3\,I$.

1° Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,2}$ ($\mathbb{R}$) engendré par M et I. Quelle est sa dimension? Montrer que pour l'addition et la multiplication des matrices, E est un anneau commutatif unitaire.

2° Quelles sont les matrices de E égales à leur carré?
En plus de la matrice nulle 0 et de I on trouvera deux matrices A et B que l'on exprimera en fonction de M et de I. Montrer que AB = BA = 0.

3° Montrer que {A, B} est une base de E.
Soient (α, β) les coordonnées dans cette base d'une matrice X de E, et (α', β') celles d'une matrice X′. Calculer les coordonnées du produit XX′. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur α et β, pour que X soit inversible. Quelles sont, dans ce cas, les coordonnées de X^{-1}.

1.41 Soit E l'ensemble des fonctions polynômes de degré au plus égal à 2.

1° Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que les polynômes $x \longmapsto 1$, $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$ constituent une base B de E.

2° Soit l l'application de E dans lui-même définie de la manière suivante :
Si $P(x) = ax^2 + bx + c \qquad l(P)(x) = cx^2 + bx + a$.

a) Montrer que $l \in GL(E)$.

b) Écrire la matrice A de l dans la base B. Calculer A^2.

3° Soit
$$E_1 = \{P \mid P \in E, l(P) = P\}$$
$$E_2 = \{P \mid P \in E, l(P) = -P\}.$$

Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Quelles sont leurs dimensions respectives?

4° Soit d l'application de E dans lui-même qui au pylonôme P fait correspondre sa dérivée P′.

a) Montrer que d est un endomorphisme de E. Quelle est la matrice D de d dans la base B.

b) Calculer AD et DA.

1.42 Complexifié d'un espace vectoriel réel.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note E_c le produit cartésien E × E, et on le munit des lois suivantes :

- si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de E_c, on pose
$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
- si (x, y) est un élément de E_c, étant donné $a + ib \in \mathbb{C}$, on pose
$$(a + ib)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

1° Montrer que l'on a ainsi muni E_c d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

2° *a)* Montrer que l'application

$$E \xrightarrow{\ \varphi\ } E_c$$
$$x \longmapsto (x, 0)$$

est $\mathbb{R}$-linéaire et injective.
Soit E_1 l'image de E par cette application.

b) Montrer que l'application

$$E \longrightarrow E_c$$
$$x \longmapsto i(x, 0)$$

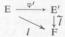
est $\mathbb{R}$-linéaire et injective.
Soit E_2 l'image de E par cette application.

c) Établir que tout élément de E_c s'écrit d'une manière unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2.
Il en résulte que, si l'on identifie x à $(x, 0)$ on écrira $x + iy$ au lieu de (x, y).

3° Montrer que si l est une application $\mathbb{R}$-linéaire de E dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel F, il existe une et une seule application $\mathbb{C}$-linéaire $\bar{l}$ de E_c dans F rendant le diagramme suivant commutatif :

(c'est-à-dire telle que $\bar{l} \circ \varphi = l$).

4° Si E′ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et φ' une application $\mathbb{R}$-linéaire de E dans E′ tel que pour toute application $\mathbb{R}$-linéaire l de E dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel F il existe une et une seule application $\mathbb{C}$-linéaire $\tilde{l}$ de E′ dans F rendant le diagramme suivant commutatif



montrer qu'il existe un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de E_c sur E′.

1.43 Espace quotient.

Étant donné un sous-espace vectoriel F d'un K-espace vectoriel E on considère la relation binaire R définie sur E par

$$\forall (x, y) \in E \times E \qquad xRy \iff x - y \in F.$$

1° Montrer que R est une relation d'équivalence sur E.

2° Montrer que R est compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire, i.e.,

$$xRx' \text{ et } yRy' \Longrightarrow (x + y)\ R\ (x' + y')$$

et

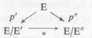
$$xRx' \Longrightarrow \forall \lambda \in K \quad (\lambda x)\ R\ (\lambda x').$$

3° On note E/F l'ensemble quotient de E par R et p l'application canonique de E sur E/F. Montrer que l'on peut munir E/F d'une et d'une seule structure de K-espace vectoriel pour laquelle p est une application linéaire.

4° Soit F′ un supplémentaire de F dans E. Montrer que la restriction de p à F′ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de F′ sur E/F.
En déduire, lorsque E est de dimension finie, que

$$\dim (E/F) = \dim E - \dim F.$$

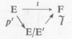
1.44 Soient E′ et E″ deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E tels que E′ soit contenu dans E″.
Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire surjective u de E/E′ sur E/E″ telle que, p' et p'' désignant les applications canoniques de E sur E/E′ et de E sur E/E′, on ait $p'' = u \circ p'$, ce que l'on exprime en disant que le diagramme suivant est commutatif :



1.45 Factorisation canonique d'une application linéaire.

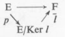
Soient E et F deux K-espaces vectoriels et l une application linéaire de E dans F.

1° Si l s'annule sur le sous-espace vectoriel E′ de E, c'est-à-dire si E′ est contenu dans Ker l, montrer qu'il existe une et une seule application linéaire $\tilde{l}$ rendant le diagramme suivant commutatif :



p' étant la surjection canonique de E sur E/E′.

2° Lorsque E′ = Ker l on note $\bar{l}$ l'unique application linéaire rendant le diagramme suivant commutatif :



p étant l'application canonique de E sur E/Ker l.

a) Établir que $\bar{l}$ est injective.

b) En déduire que $\bar{l}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de E/Ker l sur l (E) et retrouver ainsi que E/Ker l est isomorphe à tout supplémentaire de Ker l.

c) Conclusion : on a $l = i \circ \bar{l} \circ p$

où
$p : E \longrightarrow E/\mathrm{Ker}\, l$ est la surjection canonique
$\bar{l} : E/\mathrm{Ker}\, l \longrightarrow \mathrm{Im}\, l$ est un isomorphisme
$i : \mathrm{Im}\, l \longrightarrow F$ est l'injection canonique.

1.46 Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E.
On note l l'application de E_1 dans $(E_1 + E_2)/E_2$ qui à un élément x de E_1 associe sa classe dans $(E_1 + E_2)/E_2$.

1° Montrer que l est linéaire et surjective.

2° Montrer que Ker $l = E_1 \cap E_2$.
En déduire un isomorphisme de $E_1/E_1 \cap E_2$ sur $(E_1 + E_2)/E_2$.

3° Lorsque E_1 et E_2 sont de dimensions finies, utiliser le résultat précédent pour retrouver que

$$\dim (E_1 + E_2) + \dim (E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2.$$

1.47 Dérivations.

Soient K un corps et E un K-espace vectoriel.
On appelle dérivation de K dans E toute application D de K dans E telle que

$$\forall (\alpha, \beta) \in K^2 \qquad \begin{aligned} D(\alpha + \beta) &= D(\alpha) + D(\beta) \\ D(\alpha\beta) &= \alpha D(\beta) + \beta D(\alpha). \end{aligned}$$

1° Montrer que l'ensemble Der (K, E) des dérivations de K dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ (K, E).

2° Montrer que D (1) = 0 et que $D^{-1}(\{0\})$ est un sous-corps de K.

3° On considère l'espace vectoriel $K^{(K)}$ des familles d'éléments de K, indexées par K, à support fini, et l'application

$$e : K \longrightarrow K^{(K)}, \qquad \alpha \longmapsto e_\alpha$$

où e_α est l'application de K dans K définie par

$$\forall \beta \in K \qquad \begin{aligned} e_\alpha(\beta) &= 0 \quad \text{si} \quad \beta \neq \alpha \\ e_\alpha(\alpha) &= 1. \end{aligned}$$

Montrer que $(e_\alpha)_{\alpha \in K}$ est une base de $K^{(K)}$.

4° Soit L le sous-espace vectoriel de $K^{(K)}$ engendré par les éléments $e_{\alpha+\beta} - e_\alpha - e_\beta$, $e_{\alpha\beta} - \alpha e_\beta - \beta e_\alpha$ lorsque α et β décrivent K.
On note Ω_K l'espace quotient $K^{(K)}/L$ et p l'application canonique de $K^{(K)}$ sur Ω_K. Montrer que l'application $d = p \circ e$ est une dérivation de K dans Ω_K.

5° Si D est une dérivation de K dans E, on lui associe l'application K-linéaire D′ de $K^{(K)}$ dans E, définie sur la base $(e_\alpha)_\alpha \in K$ par

$$D'(e_\alpha) = D(\alpha).$$

Montrer que D′ s'annule sur L; en déduire une application K-linéaire $\tilde{D}$ de Ω_K, dans E et vérifier que $D = \tilde{D} \circ d$.

6° A partir des résultats précédents montrer que pour toute dérivation D de K dans E il existe une et une seule application K-linéaire $\widetilde{D}$ de Ω_K dans E telle que $D = \widetilde{D} \circ d$, ce que l'on exprime en disant que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{d} & \Omega_K \\ & \searrow_{D} & \downarrow \widetilde{D} \\ & & E \end{array}$$

est commutatif.

7° Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Der}\,(K, E) & \longrightarrow & \mathfrak{L}\,(\Omega_K, E) \\ D & \longmapsto & \widetilde{D} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

1.48 Espace dual.

Soit E un K-espace vectoriel. On appelle dual de E et on note E^* l'espace vectoriel $\mathfrak{L}\,(E, K)$ dont les éléments sont les formes linéaires sur E.
Dans toute la suite nous supposerons E de dimension finie n.
1° Soit $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une base de E. Pour tout indice i on note e_i^* l'élément de E^* tel que

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i. \end{cases}$$

Montrer que la famille $(e_i^*)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est une base de E^*.
2° Soit F un autre K-espace vectoriel et $F^* = \mathfrak{L}\,(F, K)$ son dual.
a) Si u est une application linéaire de E dans F montrer que l'application ${}^t u$ de F^* dans E^* définie par

$$\forall\, l \in F^* \qquad {}^t u\,(l) = l \circ u$$

est linéaire.
b) Vérifier que l'application de $\mathfrak{L}\,(E, F)$ dans $\mathfrak{L}\,(F^*, E^*)$, qui à u associe ${}^t u$, est linéaire.
c) Si $(f_j)_{j \in \{1, \dots, p\}}$ est une base de F, comparer la matrice de ${}^t u$ dans les bases $(f_j^*)_{j \in \{1, \dots, p\}}$ et $(e_i^*)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ et la matrice de u dans les bases $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ et $(f_j)_{j \in \{1, \dots, p\}}$. Comment passe-t-on de l'une à l'autre?
3° Étant donnée une partie A de E, on appelle orthogonal de A et on note $A^\perp$ le sous-ensemble de E^* constitué des formes linéaires s'annulant sur A.
a) Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^*.
b) Soient E′ un sous-espace vectoriel et $(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une base de E telle que $(x_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ constitue une base de E′.
Si une forme linéaire l de E^* s'annule sur E′ montrer que l est combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_i^*)_{i \in \{p+1, \dots, n\}}$.

(Indication : on écrira $l = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i x_i^*$ et en calculant $l\,(x_j)$ pour $j = 1, \dots p$, on établira que $\alpha^1 = \dots = \alpha^p = 0$).
En déduire que la famille $(x_i^*)_{i \in \{p+1, \dots, n\}}$ est une base de $E'^\perp$, et donc que l'on a

$$\dim E' + \dim E'^\perp = n.$$

c) Soient $l_1, \dots, l_q$ q formes linéaires indépendantes de E^*. On se propose de démontrer que toute forme linéaire l qui est nulle pour tout élément x de E sur lequel s'annulent toutes les l_j, $j = 1, \dots, q$, est combinaison linéaire des formes $l_1, \dots, l_q$.
Nous noterons E′ le sous-espace $\bigcap_{j=1}^{q} \mathrm{Ker}\, l_j$ de E, et par hypothèse nous avons $l \in E'^\perp$.
Soit L le sous-espace vectoriel de E^* engendré par $l_1, \dots, l_q$; L est de dimension q.
• Montrer que L est inclus dans $E'^\perp$.
• Montrer que $\dim E' \geqslant n - q$ (cf. exercice n° 1.25); en déduire que $\dim E'^\perp \leqslant q$.
Conclure que $E'^\perp = L$ et donc que l est combinaison linéaire de $l_1, \dots, l_q$.

2| Formes multilinéaires. Déterminants

Dans le cours de Première, nous avons rencontré le déterminant d'une matrice (2, 2) *et mis en évidence un certain nombre de propriétés fondamentales : une matrice* (2, 2) *est la matrice d'un isomorphisme si et seulement si son déterminant est non nul ; le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit de leurs déterminants. Nous reprenons ici cette étude, mais en utilisant comme définition du déterminant une propriété caractéristique essentielle que l'on exprime en disant que c'est une forme multilinéaire alternée, et qui nous permet, dans un cadre très général, d'en déduire aisément toutes les propriétés les plus importantes.*
Le contenu de ce chapitre n'est pas explicitement au programme de la classe de Terminale. Bien sûr, chaque fois que nous l'utiliserons dans une démonstration, nous donnerons une seconde justification strictement conforme au programme. Le lecteur pourra alors apprécier combien la notion de déterminant est un outil précieux qui simplifie de nombreuses démonstrations, et l'effort fait pour assimiler ce chapitre se révélera finalement très profitable pour la compréhension de situations importantes dans l'étude de la géométrie.

2. 1 FORMES n-LINÉAIRES SUR UN ESPACE VECTORIEL E

Définition.
Une **forme n-linéaire** sur un K-espace vectoriel E est une application φ de E^n dans K, linéaire par rapport à chaque composante x_i de tout élément $(x_1, \dots, x_n)$ de E^n.

On emploie couramment la terminologie suivante :
• une forme 2-linéaire est appelée **forme bilinéaire**
• une forme 3-linéaire est appelée **forme trilinéaire.**

Théorème.
L'ensemble $\mathfrak{L}_n(E, K)$ des formes n-linéaires sur le K-espace vectoriel E a une struc- de K-espace vectoriel.

En effet, il est facile de vérifier que $\mathfrak{L}_n(E, K)$ est une partie stable, donc un sous-espace vectoriel, de l'espace vectoriel $\mathcal{F}\,(E^n, K)$ des applications de E^n dans K.

2. 2 FORMES n-LINÉAIRES ALTERNÉES SUR UN ESPACE VECTORIEL E

Définition.

On dit qu'une forme n-linéaire sur l'espace vectoriel E est **alternée** si elle s'annule pour tout n-uplet de vecteurs ayant deux composantes égales.

Explicitons cette définition lorsque $n = 2, 3$.

• $n = 2$. Une forme bilinéaire φ sur E est alternée si

$$\forall x \in E \qquad \varphi(x, x) = 0.$$

• $n = 3$. Une forme trilinéaire φ sur E est alternée si

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \varphi(x, x, y) = \varphi(x, y, x) = \varphi(y, x, x) = 0.$$

EXERCICES

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_n(E, K)$ des formes n-linéaires alternées sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(E, K)$.
2. Montrer que si n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de E sont linéairement dépendants on a $\forall \varphi \in \mathcal{A}_n(E, K) \qquad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des formes n-linéaires alternées.

Théorème.

Soit E un K-espace vectoriel (*). Une forme n-linéaire φ sur E est alternée si et seulement si, en permutant deux composantes de tout n-uplet de vecteurs on obtient deux valeurs de φ opposées.

(*) *K est supposé être de caractéristique différente de 2.*

Dans les cas que nous utiliserons ($n = 2$ ou 3) on a donc, si φ est alternée :

• $n = 2$. $\quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$

• $n = 3$. $\quad \forall (x, y, z) \in E^3 \quad \varphi(x, y, z) = -\varphi(y, x, z)$

$$\varphi(x, y, z) = -\varphi(x, z, y)$$
$$\varphi(x, y, z) = -\varphi(z, y, x).$$

Démontrons ce théorème pour $n = 2$ et $n = 3$.

• $n = 2$.

Si $\forall (x, y) \in E^2$ on a $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$ on obtient en particulier

$$\forall x \in E \qquad \varphi(x, x) = -\varphi(x, x)$$

d'où

$$\forall x \in E \qquad \varphi(x, x) = 0.$$

Réciproquement supposons que l'on ait $\forall x \in E \ \ \varphi(x, x) = 0$, et soient x, y, deux éléments de E.

De l'égalité $\varphi(x + y, x + y) = 0$ on déduit, en utilisant la linéarité de φ par rapport à chaque composante,

$$\varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y) = 0$$

soit

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x).$$

• $n = 3$.

Supposons d'abord que pour tout triplet (x, y, z) de E^3 on ait

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= -\varphi(x, z, y)\\ &= -\varphi(z, y, x)\\ &= -\varphi(y, x, z),\end{aligned}$$

la première égalité appliquée au triplet (x, y, y)

conduit à $\qquad \varphi(x, y, y) = -\varphi(x, y, y)$

d'où $\qquad \varphi(x, y, y) = 0,$

la deuxième égalité appliquée au triplet (x, y, x)

conduit à $\qquad \varphi(x, y, x) = -\varphi(x, y, x)$

d'où $\qquad \varphi(x, y, x) = 0,$

la troisième égalité appliquée au triplet (x, x, y)

conduit à $\qquad \varphi(x, x, y) = -\varphi(x, x, y)$

d'où $\qquad \varphi(x, x, y) = 0.$

Nous avons donc montré que φ est alternée.

Réciproquement, si φ est alternée, soit (x, y, z) un élément de E^3. Alors, de l'égalité

$$\varphi(x + y, x + y, z) = 0$$

on déduit

$$\varphi(x, x, z) + \varphi(x, y, z) + \varphi(y, x, z) + \varphi(y, y, z) = 0$$

soit $\qquad \varphi(x, y, z) = -\varphi(y, x, z).$

Les autres relations s'obtiennent de la même façon en utilisant les égalités

$$\varphi(x + z, y, x + z) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y + z, y + z) = 0.$$

Théorème.

Si E est un espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{A}_2(E, K)$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Soient $\{e_1, e_2\}$ une base de E et φ un élément de $\mathcal{A}_2(E, K)$.

Si $\qquad x = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 \quad \text{et} \quad y = \beta^1 e_1 + \beta^2 e_2$

on a

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \varphi(\alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2, \beta^1 e_1 + \beta^2 e_2)\\ &= \alpha^1\beta^1 \varphi(e_1, e_1) + \alpha^1\beta^2 \varphi(e_1, e_2) +\\ &\quad\ \alpha^2\beta^1 \varphi(e_2, e_1) + \beta^1\beta^2 \varphi(e_2, e_2)\\ &= (\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1)\, \varphi(e_1, e_2).\end{aligned}$$

Par suite φ est parfaitement déterminée par la donnée du scalaire $\varphi(e_1, e_2)$.

Montrons maintenant que, avec les mêmes notations, l'application

$$\psi : E \times E \longrightarrow KK$$
$$(x, y) \longmapsto \alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1$$

est une forme bilinéaire alternée non nulle sur E.

ψ est bilinéaire.

• ψ est alternée puisque $\forall x \in E \ \ \psi(x, x) = \alpha^1\alpha^2 - \alpha^1\alpha^2 = 0.$

• ψ est non nulle puisque $\psi(e_1, e_2) = 1.$

En conclusion, nous avons montré qu'il existe sur E une forme bilinéaire alternée non nulle ψ, et que toutes les autres sont de la forme $\lambda\psi$, où λ décrit K, ce qui signifie bien que $\dim \mathcal{A}_2(E, K) = 1$.

On a de même pour $n = 3$.

Théorème.

Si E est un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{A}_3(E, K)$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E et φ un élément de $\mathcal{A}_3(E, K)$.

Si
$$x = \sum_{i=1}^{3} \alpha^i e_i \;,\quad y = \sum_{i=1}^{3} \beta^i e_i \;,\quad z = \sum_{i=1}^{3} \gamma^i e_i,$$

on a
$$\varphi(x, y, z) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha^i e_i, \sum_{i=1}^{3} \beta^i e_i, \sum_{i=1}^{3} \gamma^i e_i\right)$$
$$= \alpha^1 \varphi\left(e_1, \sum_{i=1}^{3} \beta^i e_i, \sum_{i=1}^{3} \gamma^i e_i\right) + \alpha^2 \varphi\left(e_2, \sum_{i=1}^{3} \beta^i e_i, \sum_{i=1}^{3} \gamma^i e_i\right)$$
$$+ \alpha^3 \varphi\left(e_3, \sum_{i=1}^{3} \beta^i e_i, \sum_{i=1}^{3} \gamma^i e_i\right)$$

or
$$\varphi\left(e_1, \sum_{i=1}^{3} \beta^i e_i, \sum_{i=1}^{3} \gamma^i e_i\right) = \varphi(e_1, \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3, \gamma^2 e_2 + \gamma^3 e_3)$$
$$= \beta^2 \varphi(e_1, e_2, \gamma^2 e_2 + \gamma^3 e_3) + \beta^3 \varphi(e_1, e_3, \gamma^2 e_2 + \gamma^3 e_3)$$
$$= \beta^2 \varphi(e_1, e_2, \gamma^3 e_3) + \beta^3 \varphi(e_1, e_3, \gamma^2 e_2)$$
$$= \beta^2\gamma^3 \varphi(e_1, e_2, e_3) + \beta^3\gamma^2 \varphi(e_1, e_3, e_2)$$
$$= (\beta^2\gamma^3 - \beta^3\gamma^2)\, \varphi(e_1, e_2, e_3)$$

et, par permutation circulaire,
$$\varphi\left(e_2, \sum_{i=1}^{3} \beta^i e_i, \sum_{i=1}^{3} \gamma^i e_i\right) = (\beta^3\gamma^1 - \beta^1\gamma^3)\, \varphi(e_1, e_2, e_3)$$
$$\varphi\left(e_3, \sum_{i=1}^{3} \beta^i e_i, \sum_{i=1}^{3} \gamma^i e_i\right) = (\beta^1\gamma^2 - \beta^2\gamma^1)\, \varphi(e_1 e_2, e_3)$$

d'où finalement
$$\varphi(x, y, z) = [\alpha^1(\beta^2\gamma^3 - \beta^3\gamma^2) + \alpha^2(\beta^3\gamma^1 - \beta^1\gamma^3) + \alpha^3(\beta^1\gamma^2 - \beta^2\gamma^1)]\, \varphi(e_1, e_2, e_3)$$

et donc φ est parfaitement déterminée par la donnée de $\varphi(e_1, e_2, e_3)$.

Il suffit alors de vérifier que l'application
$$\psi : \quad E^3 \longrightarrow K$$
$$(x, y, z) \longmapsto \alpha^1\beta^2\gamma^3 - \alpha^1\beta^3\gamma^2 + \alpha^2\beta^3\gamma^1 - \alpha^2\beta^1\gamma^3 + \alpha^3\beta^1\gamma^2 - \alpha^3\beta^2\gamma^1$$

est une forme trilinéaire alternée non nulle pour obtenir le résultat annoncé.

Cette vérification se fait très simplement en écrivant :
$$\varphi(x, y, z) = \alpha^1(\beta^2\gamma^3 - \beta^3\gamma^2) + \alpha^2(\beta^3\gamma^1 - \beta^1\gamma^3) + \alpha^3(\beta^1\gamma^2 - \beta^2\gamma^1).$$

On met en évidence la linéarité par rapport à x et le fait que si
$$y = z \;,\quad \psi(x, y, z) = 0.$$

Les autres vérifications se font de manière analogue en écrivant successivement
$$\varphi(x, y, z) = \beta^1(\alpha^3\gamma^2 - \alpha^2\gamma^3) + \beta^2(\alpha^1\gamma^3 - \alpha^3\gamma^1) + \beta^3(\alpha^2\gamma^1 - \alpha^1\gamma^2)$$
et
$$\varphi(x, y, z) = \gamma^1(\alpha^2\beta^3 - \alpha^3\beta^2) + \gamma^2(\alpha^3\beta^1 - \alpha^1\beta^3) + \gamma^3(\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1).$$

Enfin l'égalité $\psi(e_1, e_2, e_3) = 1$ prouve que ψ est non nulle.

En conclusion, nous avons montré qu'il existe sur E une forme trilinéaire alternée non nulle ψ, et que toutes les autres sont de la forme $\lambda\psi$, où λ décrit K, ce qui signifie bien que $\dim \mathcal{A}_3(E, K) = 1$.

2. 3 DÉTERMINANTS

Dans ce paragraphe nous supposerons tous les espaces vectoriels de dimension 2 ou 3 cependant les résultats obtenus restent vrais en dimension finie quelconque.

a) Application déterminant.

Nous avons vu à la fin du paragraphe précédent que si $(e_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ est une base de E ($n = 2, 3$) il existe une forme n-linéaire alternée φ telle que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$; comme l'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(E, K)$ est de dimension 1, cette forme φ est unique.

L'ordre dans lequel on considère les vecteurs $e_1, \ldots e_n$ est évidemment très important puisque φ est alternée. Nous noterons B la partie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, c'est une base de E dont les éléments sont ordonnés suivant l'ordre de leurs indices; pour le rappeler nous dirons que B est une **base ordonnée** de E.

Par conséquent, nous distinguerons, en tant que bases ordonnées, les bases
$$B = \{e_1, \ldots, e_n\} \quad \text{et} \quad B' = \{e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\}$$
où σ est une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ distincte de l'identité.

Nous dirons alors :

Définition.

Soient E un espace vectoriel de dimension n ($n = 2$ ou 3) et $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base ordonnée de E. On appelle **déterminant par rapport à la base ordonnée** B et on note $\det_B$, la forme n-linéaire alternée φ sur E telle que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n vecteurs de E le scalaire $\det_B(x_1, \ldots, x_n)$ est *le déterminant des vecteurs* $x_1, \ldots, x_n$ *dans la base* B.

Expression de $\det_B(x_1, \ldots, x_n)$:

- $n = 2$.

Soient (α^1, α^2) (resp. (β^1, β^2)) les coordonnées de x_1 (resp. x_2) dans la base B. En reprenant les résultats du paragraphe 2 on obtient :
$$\det_B(x_1, x_2) = \alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1$$

expression que l'on note
$$\begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}$$

• $n = 3$.

Soient $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, $(\beta^1, \beta^2, \beta^3)$, $(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ les coordonnées respectives dans B de x_1, x_2, x_3. On a de même, d'après 2 :

$\det_B (x_1, x_2, x_3) = \alpha^1\beta^2\gamma^3 + \alpha^2\beta^3\gamma^1 + \alpha^3\beta^1\gamma^2 - \alpha^3\beta^2\gamma^1 - \alpha^2\beta^1\gamma^3 - \alpha^1\beta^3\gamma^2$

expression que l'on note

$$\begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}$$

Par définition, le déterminant de n vecteurs de E n'est pas une notion intrinsèque, mais dépend du choix d'une base ordonnée B de E. Nous allons maintenant étudier l'influence d'un changement de base.

Soit $B' = \{e_1', \ldots, e_n'\}$ une autre base ordonnée de E; $\det_B$ et $\det_{B'}$ étant deux formes n-linéaires alternées sur E sont proportionnelles et la relation

$$\det_B = \lambda \det_{B'} \quad \text{où} \quad \lambda \in K$$

conduit, pour le n-uplet $(e_1', \ldots, e_n')$, à

$$\det_B (e_1', \ldots, e_n') = \lambda \det_{B'} (e_1', \ldots, e_n') = \lambda$$

ce que, pour simplifier, on notera

$$\lambda = \det_B (B').$$

On obtient finalement :

Théorème.

Si B et B′ sont deux bases ordonnées de l'espace vectoriel E, on a $\det_B = \det_B (B') . \det_{B'}$.

La notion de déterminant a été introduite en Première à l'occasion de l'étude de l'indépendance linéaire de n-vecteurs de E. On avait alors montré, par le calcul :

Théorème.

Soient E un espace vectoriel de dimension $n (n = 2 \text{ ou } 3)$ et $x_1, \ldots, x_n$ un n-uplet de vecteurs de E. Les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants si et seulement si, pour une base ordonnée B de E, $\det_B (x_1, \ldots, x_n)$ est non nul.

Nous allons donner une autre démonstration de ce résultat. Supposons d'abord les $x_1, \ldots, x_n$ linéairement indépendants, alors $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une partie libre ayant n éléments indexés par $\{1, \ldots, n\}$ donc constitue une base ordonnée B′ de E.

La relation $\det_B = \det_B (B') \det_{B'}$, et le fait que $\det_B$ n'est pas identiquement nulle impliquent que l'on a $\det_B (B') \neq 0$.

Pour démontrer la réciproque nous allons supposer que les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont linéairement dépendants.

Il en résulte qu'il existe n scalaires, non tous nuls, $\alpha^1, \ldots \alpha^n$, tels que

$$\alpha^1 x_1 + \ldots + \alpha^n x_n = 0.$$

Supposons, par exemple, α^1 non nul; x_1 s'écrit alors comme combinaison linéaire des vecteurs $x_2, \ldots, x_n$, autrement dit on a une relation du type

$$x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda^i x_i.$$

On en déduit $\quad \det_B (x_1, \ldots, x_n) = \det_B \left(\sum_{i=2}^{n} \lambda^i x_i, x_2, \ldots, x_n \right)$

$$= \sum_{i=2}^{n} \lambda^i \det_B (x_i, x_2; \ldots, x_n)$$

or $\quad \forall i \in \{2, \ldots, n\} \quad \det_B (x_i, x_2, \ldots, x_n) = 0$

et, par suite, on a $\quad \det_B (x_1, \ldots, x_n) = 0.$

b) Déterminant d'un endomorphisme.

Soient E un espace vectoriel de dimension n ($n = 2$ ou 3) et l un endomorphisme de E. Si φ est une forme n-linéaire alternée sur E, l'application de E^n dans K qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe $\varphi (l(x_1), \ldots, l(x_n))$ est manifestement n-linéaire alternée. $\mathcal{A}_n$ (E, K) étant de dimension 1, on en déduit :

$\forall \varphi \in \mathcal{A}_n(E, K) \quad \exists \lambda_\varphi \in K \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n \quad \varphi(l(x_1), \ldots, l(x_n)) = \lambda_\varphi\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$

Si φ_1 et φ_2 sont deux éléments non nuls de $\mathcal{A}_n(E, K)$, il existe un scalaire k tel que $\varphi_1 = k\, \varphi_2$. Il en résulte que λ_φ est le même pour φ_1 et φ_2, et donc que λ_φ est indépendant de φ.

Théorème et définition.

Si l est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension $n (n = 2 \text{ ou } 3)$, il existe un unique scalaire, appelé **déterminant de** l et noté det l, tel que

$\forall \varphi \in \mathcal{A}_n (E, K) \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n \quad \varphi\left(l(x_1), \ldots, l(x_n)\right) = \det l \,.\, \varphi(x_1, \ldots, x_n).$

EXERCICE

1. Montrer que, si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base ordonnée de E, on a

$$\det l = \det_B (l(e_1), \ldots, l(e_n)).$$

Si nous considérons deux endomorphismes l et h de E, on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{A}_n (E, K) \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E$$

$$\varphi (h \circ l (x_1) \quad , \quad \ldots \quad , \quad h \circ l (x_n)) = (\det h \circ l)\, \varphi (x_1, \ldots, x_n) \quad ,$$

mais on a aussi

$$\varphi (h \circ l (x_1) \quad , \quad \ldots \quad , \quad h \circ l (x_n)) = (\det h)\, \varphi (l(x_1), \ldots, l(x_n))$$
$$= (\det h) (\det l)\, \varphi (x_1, \ldots, x_n)$$

et on peut énoncer :

Théorème.

Si l et h sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension $n (n = 2 \text{ ou } 3)$ on a

$$\det h \circ l = (\det h)\ (\det l).$$

On peut caractériser les endomorphismes inversibles au moyen de leur déterminant, et ceci de la manière suivante :

Théorème.

Soit l un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n ($n = 2$ ou 3). On a

$$l \in GL(E) \Longleftrightarrow \det l \neq 0.$$

En effet, soit $B = \{e_1, \ldots, e_n)$ une base ordonnée de E. On sait que l est un élément de GL (E) si et seulement si $\{l(e_1), \ldots, l(e_n)\}$ est une base de E. Comme les n vecteurs $l(e_1), \ldots, l(e_n)$ sont linéairement indépendants si et seulement si

$$\det_B (l(e_1), \ldots, l(e_n)) \neq 0$$

on obtient $\quad l \in GL(E) \iff \det_B (l(e_1), \ldots, l(e_n)) \neq 0$

et, puisque $\det_B (l(e_1), \ldots, l(e_n)) = \det l$,

$$l \in GL(E) \iff \det l \neq 0.$$

c) Déterminant d'une matrice.

Rappelons que les n vecteurs $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ de K^n constituent une base de K^n appelée *base canonique*. Pris dans cet ordre nous dirons qu'ils constituent la *base ordonnée canonique* de K^n.

Définition.

Soit $A = (\alpha_i^j)$ une matrice carrée d'ordre n ($n = 2$ ou 3).
On appelle déterminant de A, et on note det A, le déterminant des vecteurs colonnes de A (vecteurs de K^n) par rapport à la base ordonnée canonique de K^n.

Le déterminant de A est aussi noté $\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \cdots\cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots\cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$

On a donc :

- si $n = 2$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{vmatrix} = \alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^1$$

- si $n = 3$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} = \alpha_1^1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 + \alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1 + \alpha_1^3 \alpha_2^1 \alpha_3^2 - \alpha_1^1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 - \alpha_1^2 \alpha_2^1 \alpha_3^3 - \alpha_1^3 \alpha_2^2 \alpha_3^1.$$

Théorème.

Si l est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n ($n = 2$ ou 3) et A la matrice de l dans une base B de E on a

$$\det A = \det l.$$

En effet, si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $l(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j e_j$

on a $\quad \det A = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \cdots\cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots\cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$

et par suite $\quad \det A = \det_B (l(e_1), \ldots, l(e_n))$

d'où $\quad \det A = \det l.$

EXERCICE

2. Montrer qu'une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Corollaire.

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n ($n = 2$ ou 3), on a

$$\det B \,.\, A = \det B \,.\, \det A.$$

Soit $(e_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ une base de E et l (resp. h) l'endomorphisme de E ayant pour matrice A (resp. B) dans la base $(e_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$. Alors $h \circ l$ a pour matrice B.A dans cette base et on a $\quad \det B.A = \det (h \circ l) = \det h . \det l = \det B . \det A.$

EXERCICES

2.1 Montrer que

$$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix} = (a + b + c)^3$$

2.2 Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ -\beta' & \alpha' \end{pmatrix}$$

Calculer det A et det B.
Déduire de la relation $\det(AB) = \det A . \det B$, que l'on a

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) = (\alpha\alpha' + \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2.$$

2.3 $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ étant 9 nombres réels donnés, on considère :
α) l'application l de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$l(x, y, z) = (ax + by + cz, \quad a'x + b'y + c'z, \quad a''x + b''y + c''z).$$

β) le système d'équations

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0. \end{cases}$$

γ) le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
(i) l'application linéaire l n'est pas injective
(ii) le système β) admet une solution différente de (0, 0, 0)
(iii) le déterminant Δ est nul.

2.4 On donne ci-dessous les matrices d'endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension 3, relativement à une base $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chacun d'eux, déterminer s'il est ou n'est pas bijectif.
1° En calculant le déterminant de la matrice.
2° En vérifiant directement si l'image de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ est ou non une partie libre de E.

2.5 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps K de caractéristique différente de 2.
On considère deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 de E et la symétrie s par rapport à E_1 de direction E_2.
Montrer que, si $n_2 = \dim E_2$, on a $\det s = (-1)^{n_2}$.

2.6 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et B une base ordonnée de E.
On considère les vecteurs $\vec{u}_1(1, 1, 0)$, $\vec{u}_2(0, -1, 1)$ et $\vec{v}(1, -1, 1)$.
1° Montrer que le plan vectoriel P engendré par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ et la droite vectorielle D engendrée par v sont deux espaces supplémentaires.

2° Soit s la symétrie par rapport à P, de direction D.
Montrer que l'image x' de x par s est caractérisée par

- $x' - x$ et v sont linéairement dépendants
- $\det_B (x' + x, u_1, u_2) = 0$.

3° Déterminer les coordonnées de x' en fonction de celles de x.
En déduire la matrice de s dans la base B.

2.7 On considère sur un espace vectoriel E de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, une forme bilinéaire alternée f. Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E, montrer que f est déterminée dès que l'on connaît les trois nombres $f(e_2, e_3)$, $f(e_3, e_1)$, $f(e_1, e_2)$.
Calculer $f(x, y)$ en fonction de ces trois nombres et des coordonnées de x et de y dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

2.8 On considère le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad \text{où tous les } a_i^j \text{ sont des réels.}$$

1° En utilisant son expression développée, montrer que l'on peut écrire

$$\Delta = A_1^1 a_1^1 + A_1^2 a_1^2 + A_1^3 a_1^3.$$

Quels sont les coefficients A_1^1, A_1^2, A_1^3?
2° On se propose de retrouver les valeurs des coefficients A_1^1, A_1^2, A_1^3 au moyen d'un raisonnement facilement généralisable.
Considérant pour $i = 1, 2, 3$ le triplet (a_i^1, a_i^2, a_i^3) comme le triplet des coordonnées d'un vecteur x_i d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, par rapport à une base $\{e_1, e_2, e_3\}$, le déterminant Δ est la valeur $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ d'une forme trilinéaire alternée φ sur E telle que $\varphi(e_1, e_2, e_3) = 1$.
Montrer que $A_1^1 = \varphi(e_1, x_2, x_3)$, et que A_1^1 est une valeur d'une forme bilinéaire alternée φ_1 sur le sous-espace vectoriel E_1 de E engendré par e_2 et e_3. Que vaut $\varphi_1(e_2, e_3)$. Retrouver ainsi le résultat du 1°.
Montrer de même que $A_1^2 = \varphi(e_2, x_2, x_3)$ et que A_1^2 est une valeur d'une forme linéaire alternée φ_2 sur le sous-espace vectoriel E_2 de E engendré par e_1 et e_3. Que vaut $\varphi_2(e_1, e_3)$?
3° Généraliser les résultats précédents, en utilisant la même méthode, au cas d'un déterminant d'ordre n

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^i & & a_n^i \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Montrer que l'on peut écrire $\Delta = A_1^1 a_1^1 + \ldots + A_1^i a_1^i + \ldots + A_1^n a_1^n$
avec, pour $i = 2, \ldots, n-1$

$$A_1^i = (-1)^{1+i} \begin{vmatrix} a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{i-1} & \cdots & a_n^{i-1} \\ a_2^{i+1} & \cdots & a_n^{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

et

$$A_1^1 = \begin{vmatrix} a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_2^3 & \cdots & a_n^3 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \qquad A_1^n = (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_2^2 & & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

2.9 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n ($n \leqslant 3$). Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble des bases ordonnées de E, par $B \mathcal{R} B' \Longleftrightarrow \det_B (B') > 0$ est une relation d'équivalence, admettant deux classes.

3| La structure affine

La structure d'espace affine, ou structure affine, qui a été étudiée en Seconde et en Première figure aussi au programme de Terminale. La révision des résultats connus sera d'autant plus féconde qu'elle ne sera pas une répétition pure et simple, mais s'accompagnera d'une réflexion sur des notions déjà en partie familières. Cette structure est très importante, et comme c'est le cas très souvent pour une notion mathématique, il y a plusieurs manières de la présenter qui sont logiquement équivalentes, mais qui n'ont pas la même valeur du point de vue de l'intuition à laquelle elles se réfèrent, ni du point de vue de la technique mathématique qu'elles incitent à mettre en œuvre. C'est pourquoi nous pensons qu'il n'est pas inutile de procéder ici à une nouvelle réflexion sur la définition de la structure affine, et en raison du rôle capital qu'elle joue en géométrie, de donner un très rapide aperçu du développement historique qui a conduit à la mettre en évidence.

La section I est indépendante du cours proprement dit. Nous conseillons cependant vivement sa lecture attentive, avant d'aborder la suite du cours, et sa relecture après que cette suite aura été abordée, car nous pensons qu'elles aideront le lecteur à dominer de plus haut les techniques qu'il acquerra au cours de l'étude des chapitres suivants.

La section II reprend de façon condensée et précise les notions mathématiques mentionnées dans la section I et dont nous aurons besoin dans la suite.

I. La genèse de la structure affine

3.1 RÉALITÉ ET MODÈLE

Sous sa forme la plus simple et sous sa forme historique initiale, la géométrie est une théorie déductive qui a pour objet de rendre compte des propriétés de l'espace physique.

Au départ, nous trouvons donc, d'une part, une *réalité* : l'espace physique, et d'autre part une construction intellectuelle, un *modèle* dont l'étude est la théorie mathématique que l'on appelle la géométrie. Le problème de l'adéquation de ce modèle à la réalité qu'il doit aider à dominer est important : il concerne la valeur pratique de la théorie;

mais il est indépendant de celui de la cohérence intrinsèque de la théorie, et il ne peut recevoir de solution unique, ni définitive. La question de savoir si une surface matériellement réalisée peut être considérée comme ayant les propriétés d'un plan mathématique dépend des circonstances, et essentiellement de la précision des opérations techniques que l'on veut réaliser à partir de la surface matérielle : la réponse ne sera pas la même pour un menuisier qui dresse une planche et pour un ajusteur qui doit fournir une pièce relevant de ce qu'on appelle la mécanique de précision. De même, s'il est légitime, dans la quasi-totalité des cas de considérer comme parallèles, les diverses verticales d'un même édifice, pour une construction qui exigerait sur les longueurs une précision de l'ordre du centième de millimètre, deux poteaux verticaux de 10 m de haut, éloignés de 100 m, et dont les deux bases seraient sur une même « horizontale » ne seraient pas les deux côtés d'un rectangle.

C'est dire qu'il faut toujours procéder avec discernement, même si dans la plupart des cas, les propriétés du modèle fourni par la géométrie peuvent guider très valablement notre action sur la réalité.

3. 2 LES CONTRAINTES DE LA DÉDUCTION

L'étude intrinsèque du modèle est une *théorie déductive*. Cela veut dire qu'il ne s'agit pas de faire un inventaire plus ou moins exhaustif des propriétés les plus intéressantes du modèle, mais de relier toutes ses propriétés les unes aux autres, et plus précisément, à partir de certaines d'entre elles supposées acquises, de déduire toutes les autres par les seules vertus du raisonnement logique.

Les propriétés, admises au départ, et dont toutes les autres sont déduites, sont appelées les *axiomes* de la théorie. Les mathématiciens grecs du IIIe siècle avant Jésus-Christ étaient très conscients de cette démarche, qui est celle d'EUCLIDE dans ses Éléments. Mais si le principe de ce qu'est une théorie mathématique était connu trois siècles avant notre ère, la réalisation n'avait pas la perfection qui lui a été longtemps attribuée. L'axiomatique d'Euclide était incomplète. Le mathématicien allemand David HILBERT (1862-1943) qui a joué un rôle décisif dans le développement des mathématiques et dans l'élucidation de leur nature, a repris, pas à pas, dans son ouvrage intitulé « Grundlage der Geometrie », la construction d'Euclide et a dénombré cinq fois plus d'axiomes qu'Euclide n'en avait énoncés.

Mais il y a plus important encore, car, pour une même théorie, il est possible de faire des choix différents des propriétés prises comme point de départ. On obtiendra au total les mêmes propriétés, mais celles qui figurent comme axiomes dans un exposé, seront des théorèmes dans un autre, dont les axiomes seront soit des axiomes, soit des théorèmes du premier. Plus la théorie est complexe et plus le nombre de choix possibles est grand. C'est le cas de la géométrie, et cela amène la question : parmi tous les choix possibles, en est-il un que l'on puisse qualifier de meilleur que les autres? La réponse ne peut avoir un fondement logique, puisque tous les systèmes d'axiomes que l'on peut présenter sont, s'ils sont corrects, logiquement équivalents. Elle ne peut faire intervenir que des arguments de simplicité, de commodité, d'harmonie dans le développement de la théorie et dans ses articulations avec les autres théories.

Un bon système d'axiomes doit permettre une classification claire des propriétés du modèle, en rattachant chacune d'elles à un axiome ou à un groupe d'axiomes. Cela donne une indication précieuse sur l'outillage qu'il y a lieu d'utiliser pour mettre en

œuvre la propriété, et cela permet en outre de transporter les résultats acquis dans une théorie à une autre dans laquelle ces mêmes axiomes figureraient à titre d'axiomes ou de théorèmes. Un bon système doit aussi permettre d'utiliser dès le départ des outils mathématiques puissants et dont l'usage se retrouvera dans d'autres domaines.

3. 3 QUELQUES IDÉES FONDAMENTALES

Un tel système existe actuellement pour la géométrie, dont le modèle de l'espace physique qu'elle propose est appelé l'espace euclidien. Il a été le fruit d'efforts menés essentiellement pendant le XIXe siècle, suivant des lignes d'action que l'on esquisse ci-dessous, sans aucun souci de chronologie.

• *La reconnaissance explicite déjà mentionnée du rôle des axiomes et la recherche des « bonnes axiomatiques ».*

• *La recherche d'un principe de classification des propriétés de l'espace.*

On sait par exemple que des propriétés telles que l'alignement des points, et pour parler un vieux langage des rapports des longueurs de segments alignés, les rapports des aires d'ensembles coplanaires sont conservées lorsque l'on passe d'une figure de l'espace à son ombre au soleil, tandis que la longueur des segments ne l'est pas, et l'on constate que toute une partie de la géométrie peut être étudiée sans que la notion de longueur, ou pour parler un langage plus correct en l'espèce, sans que la notion de distance intervienne. Faire intervenir la distance va enrichir le modèle. Et il y aura lieu de distinguer les propriétés qui font intervenir réellement la notion de distance de celles qui ne le font pas (contrairement aux apparences, la notion de milieu ne la fait pas intervenir). Mais que veut dire « intervenir réellement »?

• *C'est ici qu'intervient la notion de transformation et de groupe de transformations.*

L'usage réserve à la géométrie le mot « transformation » où il signifie purement et simplement bijection sur lui-même de l'espace étudié. On sait que pour la composition des applications l'ensemble des bijections d'un ensemble sur lui-même a une structure de groupe. On l'appelle le groupe symétrique de l'ensemble et il n'est pas commutatif dès que l'ensemble a plus de deux éléments. Mais ce qui est plus intéressant que le groupe symétrique tout entier, ce sont ses sous-groupes propres. Un tel sous-groupe est appelé un groupe de transformations de l'espace.

Il est clair par exemple que si nous considérons l'ensemble des transformations du plan qui à tout triplet de points alignés font correspondre un triplet de points alignés, c'est un sous-groupe propre du groupe symétrique du plan.

On peut concevoir alors qu'il existe une relation entre propriétés définies dans l'espace et groupes de transformations de l'espace.

• *Invariants d'un groupe de transformations.*

Mais si la notion de groupe de transformations est claire, celle de propriété l'est beaucoup moins. Voici comment on peut lui donner une forme mathématique nette. Prenons l'exemple de l'alignement des points. Un triplet de points de E est un élément de $E \times E \times E$, et l'ensemble des triplets de points alignés est une partie A de $E \times E \times E$. D'autre part, si σ est une transformation de E, on peut lui associer canoniquement la transformation $\sigma \times \sigma \times \sigma$ de $E \times E \times E$, définie en posant pour tout triplet (x, y, z) de $E \times E \times E$

$$(\sigma \times \sigma \times \sigma)(x, y, z) = (\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)).$$

Il est clair que si σ décrit un groupe G de transformations de E, $\sigma \times \sigma \times \sigma$ décrit un groupe, isomorphe à G, de transformations de $E \times E \times E$.

La propriété « alignement des points » caractérise alors la partie A de $E \times E \times E$, et le fait que G conserve l'alignement des points s'exprime par le fait que pour tout $\sigma \in G$, $\sigma \times \sigma \times \sigma$ transforme A en elle-même. On dit alors que A est un *invariant* du groupe G.

On peut schématiser de manière analogue la situation suivante : un groupe G de transformations du plan E transforme toute droite en droite, et tout couple de droites orthogonales en un couple de droites orthogonales. Les droites sont des éléments de $\mathcal{T}(E)$, et leur ensemble $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathcal{T}(E)$, l'ensemble des couples de droites orthogonales est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{T}(E) \times \mathcal{T}(E)$. D'autre part, si σ est une transformation de E, on peut lui associer canoniquement une transformation $\hat{\sigma}$ (de $\mathcal{T}(E)$), en posant pour tout élément de A de $\mathcal{T}(E)$ $\hat{\sigma}(A) = \{\sigma(x) \mid x \in A\}$.

Dans ces conditions, si $\sigma \in G$ on a $\hat{\sigma}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ et $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, et on dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}$ sont des invariants de G.

Ce que l'on a vu dans les deux exemples précédents peut se généraliser de la façon suivante :

On considère tous les ensembles que l'on peut former à partir de E au moyen des deux procédés

(i) prendre l'ensemble des parties d'un ensemble déjà obtenu

(ii) prendre le produit de deux ensembles déjà obtenus.

Pour tout ensemble F ainsi obtenu, on peut en procédant comme dans les exemples ci-dessus, faire correspondre canoniquement à G un sous-groupe de $\mathcal{S}(F)$ qui lui est isomorphe : tout élément de F invariant par ce groupe, sera dit un **invariant** du groupe de transformations G de E.

Ceci nous permet de donner une définition mathématique précise de la notion de **propriété conservée par** G, une propriété conservée par G correspond à un invariant de G. Et on a les résultats suivants :

« Si G_1 et G_2 sont deux groupes de transformations de E, $G_1 \subset G_2$ implique que tout invariant de G_2 est un invariant de G_1 » et « Pour chaque invariant il existe un plus grand groupe de transformations qui l'admet comme invariant, et à chaque groupe de transformations peut être associé l'ensemble de ses invariants » ou sous une autre forme : à chaque propriété, on peut associer un groupe de transformations, qui est le plus grand de ceux qui la conserve, et à chaque groupe les propriétés qu'il conserve.

• *Groupe opérant dans un ensemble.*

On parvient alors à une idée extrêmement importante qui a été formulée en 1872, dans une publication fameuse connue sous le nom de Programme d'Erlangen, par le mathématicien allemand Félix Klein : une théorie géométrique concerne un ensemble et un groupe de transformations de cet ensemble, et tous les théorèmes de la géométrie correspondante sont des théorèmes d'existence d'invariants de ce groupe. On a là une situation conceptuellement très simple, que vous avez déjà rencontrée et que vous rencontrerez encore : un couple (E, G) où E est un ensemble et G un groupe de bijections de E.

A tout couple (x, σ) de $E \times G$ on peut associer l'image de x par la bijection σ, image que l'on a notée ci-dessus $\sigma(x)$, mais qu'il est très commode de noter aussi σx, en utilisant une notation multiplicative, ou $\sigma + x$ en utilisant une notation additive.

On reconnaît là, en effet, un cas particulier d'opération externe sur E. Les éléments de G sont souvent qualifiés d'opérateurs, et on dit que G *opère sur* E. Vous avez déjà rencontré cette situation dans le cas d'un espace vectoriel sur un corps K.

A tout couple $(x, \alpha) \in E \times K$ on associe un élément de E noté αx, et l'opération externe obéit aux axiomes bien connus des espaces vectoriels, qui ont pour conséquence, que si $\alpha \neq 0$, l'application $x \longmapsto \alpha x$ est une bijection de E sur lui-même. Autrement dit, si l'on considère $K^* = K - \{0\}$, ses éléments ne sont pas des bijections de E, mais à chacun d'eux est associé une bijection. En outre, l'axiome $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ signifie qu'au produit $\alpha\beta$ est associée la composée de la bijection associée à β suivie de la bijection associée à α. C'est-à-dire que l'application qui à tout $\alpha \in K^*$ associe la bijection $x \longmapsto \alpha x$ de E sur lui-même est un homomorphisme (injectif en l'espèce) de $(K^*, \times)$ dans le groupe symétrique de E. Nous dirons encore dans ce cas que K^* opère sur E. Notons que dans le cas d'un espace vectoriel, la situation est beaucoup plus riche, car E a une structure de groupe additif, et la loi

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall \alpha \in K \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

signifie que pour $\alpha \neq 0$, la bijection associée à α est un automorphisme de (E, +) (i.e. un isomorphisme de E sur lui-même). On a d'ailleurs indiqué plus haut que tous les axiomes relatifs à l'opération externe d'un espace vectoriel peuvent être résumés dans l'énoncé : il existe un homomorphisme unitaire d'anneau de K dans l'anneau des endomorphismes de (E, +) (et on peut en déduire que cet homomorphisme est injectif, et que les endomorphismes images des éléments non nuls de K sont des automorphismes). Ce qui précède nous amène à donner la définition suivante :

Un groupe G **opère** sur un ensemble E, si à tout élément σ de G est associée une bijection φ_σ de E sur E de telle sorte que

$$\forall (\sigma, \tau) \in G \times G \qquad \varphi_{\sigma\tau} = \varphi_\sigma \circ \varphi_\tau.$$

En d'autres termes, G opère sur E s'il existe un homomorphisme de G dans le groupe symétrique de E.

---

3. 4 STRUCTURE VECTORIELLE ET STRUCTURE AFFINE

L'élaboration de la notion de vecteur est aussi une conquête du XIXe siècle, bien que ce soit le XXe qui lui ait donné sa forme définitive dans ses aspects les plus simples, même si, paradoxalement, des développements beaucoup plus compliqués d'algèbre multilinéaire et extérieure avaient été effectués beaucoup plus tôt par le mathématicien allemand Grassmann (1809-1877).

On peut voir l'origine de la notion dans les « segments orientés » utilisés par Chasles (1793-1880) (cf. la formule qui porte son nom), et qui permettaient de substituer à des formules portant sur des longueurs, des formules utilisant des « mesures algébriques de segments orientés » et valables quel que soit le « cas de figure ».

Les segments orientés ont aussi été considérés dans le plan et dans l'espace sous le nom de vecteurs liés, une relation d'équivalence, l'équipollence, était définie sur l'ensemble des vecteurs liés et permettait de définir une addition sur l'ensemble des classes. Chaque classe était appelée un vecteur libre. (Ce langage moderne des classes d'équivalence ne fut, bien entendu, pas employé jusqu'à une date assez récente, et la distinction entre vecteur lié et vecteur libre était souvent fort peu nette).

D'autre part, des « grandeurs » physiques et cinématiques telles que la force, la pression, la vitesse, l'accélération, le moment cinétique étaient considérées comme des vecteurs, sans qu'une nouvelle définition du terme fut donnée à cette occasion, et étaient représentées symboliquement par des segments orientés, sans que le caractère symbolique de cette représentation soit toujours assez souligné.

Un progrès essentiel a été réalisé lorsque l'on a compris qu'il ne fallait pas définir et considérer chaque vecteur isolément, mais que ce qui était fécond, c'étaient les ensembles de vecteurs constituant un groupe commutatif pour leur addition, et munis de l'opération externe bien connue où le corps K était au début toujours $\mathbb{R}$. L'important n'est pas le vecteur, mais la structure d'espace vectoriel.

Un élément n'est pas intrinsèquement un vecteur, il a droit à ce titre si et seulement si il est élément d'un ensemble qui a été muni d'une structure d'espace vectoriel, et aussi longtemps que cette structure intervient dans les raisonnements que l'on fait.

Un autre progrès a résulté d'une compréhension plus profonde du rôle de la structure vectorielle dans le modèle qu'est l'espace euclidien.

Les segments orientés ont d'abord été abandonnés au profit des couples formés par leurs extrémités. Le segment [A, B] est {A} si A = B, et si A ≠ B il est l'ensemble des points de la droite contenant A et B situés entre A et B. S'il est orienté, c'est qu'on distingue le couple (A, B) du couple (B, A), si A ≠ B. Mais, ce qui compte en définitive, c'est uniquement ce couple, et nullement les points situés entre A et B sur la droite qui les contient.

D'où la notion importante de *couple de points*, encore appelé *bipoint*. Si E est l'ensemble des points, E × E est celui des bipoints. Vous savez alors (cf. *Manuel de Seconde*, chapitre 15), comment à partir d'une axiomatique traditionnelle, on peut définir sur l'ensemble des bipoints une relation d'équivalence, dite relation d'équipollence, et comment on dote l'ensemble V des classes d'une structure d'espace vectoriel.

Dans cette optique, le vecteur apparaît donc en géométrie comme une classe d'équivalence de bipoints.

Autrement dit, un vecteur est une partie de E × E. C'est donc *le graphe d'une relation* sur E. Que peut-on dire de cette relation?

Il suffit de se rappeler que si v est un vecteur, pour tout point $A \in E$ il existe un unique point A' tel que $(A, A') \in v$. Donc v est le graphe d'une application de E dans E. Mais, comme inversement, pour tout point $A' \in E$, il existe un et un seul point A tel que $(A, A') \in v$, cette application est une bijection de E sur E.

Tout vecteur de E est donc le graphe d'une transformation de E, et la somme de deux vecteurs v_1, v_2 a été définie de telle sorte que $v_1 + v_2$ est le graphe de la composée des transformations associées à v_1 et v_2.

Ces transformations sont appelées les translations de E : elles forment un groupe T isomorphe au groupe des vecteurs de E.

Finalement ce que nous retrouvons à travers l'arsenal des points, bipoints, relation d'équipollence et à partir des axiomes classiques, c'est la situation simple et fondamentale selon F. Klein, d'un groupe (V, +) qui opère sur E. Mais la situation présente quelques traits remarquables qui vont rendre particulièrement commode la manipulation de ce groupe. Tout d'abord, tout bipoint de E appartient à un seul vecteur de V, donc il existe un seul élément de V tel que la translation correspondante donne le second élément du bipoint comme image du premier : on exprime ce fait en disant que (V, +) opère sur E *de façon simplement transitive*.

En outre, V, et par suite T, n'a pas seulement une structure de groupe commutatif, mais aussi une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On a donc finalement un triplet d'ensembles (E, V, $\mathbb{R}$) et la situation peut être ainsi décrite :

> E est un ensemble sur lequel le groupe commutatif V opère de façon simplement transitive, et $\mathbb{R}$ opère sur V de telle sorte que V ait une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On résume cela en disant que E est muni d'**une structure d'espace affine** associé à l'espace vectoriel V, qui est espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ou plus simplement que E est **un espace affine** associé au $\mathbb{R}$-espace vectoriel V.

Il est commode d'utiliser un langage qui donne des noms différents aux éléments des ensembles E, V, $\mathbb{R}$ et d'appeler **points** les éléments de E, **vecteurs** ceux de V, **scalaires** ceux de $\mathbb{R}$. Mais il serait fâcheux, par l'introduction d'une métaphysique parasite de considérer que ces mots différents sont l'indice d'une nature différente des éléments des ensembles E, V, $\mathbb{R}$. Ils ne se rapportent qu'à leurs fonctions dans la structure affine.

On peut, par exemple, considérer $\mathbb{R}$ comme espace affine associé à $\mathbb{R}$, espace vectoriel sur lui-même : tout élément de $\mathbb{R}$ peut alors être tour à tour point, vecteur, scalaire.

La structure affine étant définie, il reste à savoir comment il faut définir la compatibilité d'une application d'un ensemble E dans un ensemble E' avec les structures affines dont ils peuvent être pourvus. Ce point sera examiné dans la prochaine section. Les applications compatibles avec la structure affine seront appelées **applications affines.** Parmi elles, les bijections affines d'un espace affine dans lui-même sont les éléments du groupe affine de cet espace : les propriétés affines sont exactement celles qui sont conservées par les transformations de ce groupe.

3. 5 CONCLUSION

Une partie importante des propriétés du modèle qu'étudie la géométrie est contenue dans cet énoncé :

le modèle est un espace affine associé à un espace vectoriel de dimension 3 *sur* $\mathbb{R}$.

Cet énoncé peut être pris comme un des axiomes de la théorie que constitue l'étude de ce modèle.

Les avantages de ce choix sont nombreux et importants :

• Mettre immédiatement en évidence l'outillage le plus commode pour étudier le modèle, tandis que du point de vue intuitif l'accent est mis sur les **translations** dont la signification dans l'espace physique n'a rien de mystérieux et est fondamentale.

• Faire entrer cette théorie particulière dans le cadre plus général de cette théorie omniprésente en mathématique, qu'est **l'algèbre linéaire.**

• Préparer dans de meilleures conditions, l'enrichissement du modèle pour obtenir **l'espace euclidien.** La distance de l'espace euclidien est, en effet, d'une nature très particulière, elle est liée à une forme bilinéaire symétrique définie positive (le produit scalaire) définie sur l'espace vectoriel euclidien et ses particularités ne peuvent être saisies que si l'on a d'abord dégagé la structure affine de l'espace.

II. Définitions

3. 6 GROUPE DE TRANSFORMATIONS

Définition.

On appelle **transformation** (ou permutation) d'un ensemble E toute bijection de E sur lui-même.

Théorème et définition.

L'ensemble des transformations d'un ensemble E a, pour la composition des applications, une structure de groupe. On l'appelle **le groupe symétrique de** E et on le note $\mathcal{S}(E)$.

EXERCICES

1. Rappeler la démonstration de la proposition précédente.
2. Montrer que si E a au moins 3 éléments, $\mathcal{S}(E)$ n'est pas commutatif.
3. Montrer que si E et F ont même cardinal (c'est-à-dire s'il existe une bijection de E sur F), $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}(F)$ sont isomorphes.

Définition.

Tout sous-groupe de $\mathcal{S}(E)$ est appelé **groupe de transformations** de E.

NOTATION

Soit G un groupe de transformations de E; si $x \in E$ et $\sigma \in G$, l'image de x par σ peut être notée $\sigma(x)$.

Mais comme l'application de $G \times E$ dans E qui à (σ, x) associe $\sigma(x)$ est une opération externe qui intervient très fréquemment on préfère souvent utiliser une notation multiplicative σx, ou une notation additive $\sigma + x$.

La notation multiplicative sera souvent utilisée dans ce qui suit immédiatement. Un bon exercice de démystification des notations consiste à récrire toutes les formules en notation additive.

3. 7 INVARIANTS

Définition.

Un élément x de E est dit **invariant** par le groupe de transformations G si on a :
$\forall \sigma \in G \quad \sigma x = x$.

Théorème.

(i) Pour tout élément σ de $\mathcal{S}(E)$, l'application $\hat{\sigma}$ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, définie pour tout A de $\mathcal{P}(E)$ par

$$\hat{\sigma}(A) = \{\sigma x \mid x \in A\}$$

est une transformation de $\mathcal{P}(E)$.

(ii) L'application $\sigma \longmapsto \hat{\sigma}$ de $\mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{S}(\mathcal{P}(E))$ est un homomorphisme injectif, mais non surjectif.

EXERCICE

1. Démontrer le théorème précédent.

Si on désigne par $\hat{G}$ l'image de G dans l'homomorphisme $\sigma \longmapsto \hat{\sigma}$, $\hat{G}$ est isomorphe à G.

Par une convention simplificatrice qui sera étendue ultérieurement, on écrira σA au lieu de $\hat{\sigma} A$.

Définition.

Une partie A de E est dite **invariante** par G si c'est un élément invariant de $\mathcal{P}(E)$ par $\hat{G}$.

EXEMPLE

Si E est un espace vectoriel, le groupe $\mathcal{H}(E)$ des homothéties vectorielles est un groupe de transformations de E et les droites vectorielles de E en sont des invariants.

EXERCICES

2. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :
   (i) A est une partie de E invariante par G
   (ii) $\forall x \in A \quad \forall \sigma \in G \quad$ on a $\quad \sigma x \in A$
   (iii) $\forall \sigma \in G \quad$ on a $\quad \sigma A \subset A$.
3. Montrer qu'une partie A de E est invariante par un groupe G si et seulement si la partie complémentaire $\complement_E^A$ l'est.
4. Montrer que si A et B sont deux parties invariantes par un groupe, il en est de même de $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $A \Delta B$.

REMARQUE

On notera qu'une partie A de E dont tous les éléments sont invariants par G est invariante par G, mais que la réciproque n'est pas vraie. Il peut être utile lorsque l'on craint une ambiguïté d'utiliser l'expression **globalement invariante** pour une partie A qui est invariante sans que tous ses éléments le soient.

EXERCICES

5. E étant le plan vectoriel euclidien et G le groupe des rotations vectorielles de E, quels sont les éléments de E et les parties de E invariants par G.
6. E étant le plan affine et G le groupe des translations de direction donnée, quels sont les éléments de E et les parties de E invariants par G.
7. A tout σ de $\mathcal{S}(E)$ on associe l'application $\sigma \times \sigma$ de $E \times E$ dans lui-même, définie, pour tout (x, y) de $E \times E$, par

$$(\sigma \times \sigma)(x, y) = (\sigma x, \sigma y).$$

(i) Montrer que $\sigma \times \sigma$ est un élément de $\mathcal{S}(E \times E)$ et que l'application $\sigma \longmapsto \sigma \times \sigma$ de $\mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{S}(E \times E)$ est un homomorphisme injectif.
(ii) Étendre ces résultats au cas d'un produit cartésien fini E^n.
(iii) I étant un ensemble donné, et $\mathcal{F}(I, E)$ l'ensemble des applications de I dans E, montrer que l'application $\hat{\sigma}$ définie pour tout f de $\mathcal{F}(I, E)$ par

$$\forall x \in E \qquad \hat{\sigma}(x) = f(\sigma x)$$

est un élément de $\mathcal{S}(\mathcal{F}(I, E))$, et que l'application $\sigma \longmapsto \hat{\sigma}$ est un homomorphisme injectif.
Pourquoi les résultats de (i) et (ii) sont-ils des cas particuliers du résultat de (iii)?

3. 8 GROUPE OPÉRANT SUR UN ENSEMBLE

Définition.

On dit qu'un groupe G **opère** sur un ensemble E s'il existe un homomorphisme de G dans $\mathcal{S}$ (E).

Si l'on désigne par φ cet homomorphisme, cela veut dire qu'à tout élément u de G, on associe une transformation $\varphi(u)$ de G de telle sorte que, pour tout couple (u, v) de $G \times G$, on ait $\varphi(u) \circ \varphi(v) = \varphi(uv)$ si la loi de G est notée multiplicativement, et $\varphi(u) \circ \varphi(v) = \varphi(u + v)$ si elle est notée additivement. A un élément x de E, $\varphi(u)$ fait correspondre un élément $\varphi(u)\, x$ de E. Comme φ est donné, au couple (u, x) de $G \times E$ correspond l'élément $\varphi(u)\, x$ de E. On a donc défini sur E une loi externe dont les opérateurs décrivent G. On pourra noter plus simplement $\varphi(u)\, x$ par ux, ou si l'on adopte une notation additive $u + x$. On a, en notation multiplicative, les lois suivantes : $\forall x \in E \;\; \forall (u, v) \in G \times G \;\; u(vx) = uvx$.

Si e est l'élément neutre de G, $\forall x \in E \;\; ex = x$.

EXERCICE

1. Montrer que si l'on a défini sur E une loi externe dont les opérateurs décrivent un groupe G, et qui satisfait aux conditions ci-dessus, G opère sur E.

EXEMPLES

1. Si E est un espace vectoriel sur un corps K, le groupe multiplicatif K* des éléments non nuls de K opère sur E.
2. Le groupe des rotations d'un espace vectoriel euclidien à deux dimensions opère sur l'ensemble des vecteurs dont la norme a une valeur donnée.
3. Le groupe des translations d'un plan affine opère sur l'ensemble des droites de ce plan.

REMARQUE

On peut déduire des résultats du théorème et de l'exercice 7 du paragraphe 7 que si G opère sur E, il opère aussi sur $\mathcal{P}$ (E), sur $E \times E$, sur $\mathcal{F}$ (I, E). Les notations simplifiées introduites à ce moment sont en accord avec celles que nous venons d'introduire dans ce paragraphe.

Définition.

Soit G un groupe opérant sur E. On dit que G **opère transitivement** sur E, ou plus brièvement qu'il est **transitif,** si pour tout couple (x, y) de $E \times E$ il existe au moins un élément u de G tel que $ux = y$.

EXERCICE

2. Dans les situations données précédemment en exemple, déterminer les cas où le groupe opère transitivement.

Définition.

Soit G un groupe opérant sur E. On dit que G **opère sur E de façon simplement transitive,** ou plus brièvement qu'il est **simplement transitif,** si pour tout couple (x, y) de $E \times E$, il existe exactement un élément u de G tel que $ux = y$.

EXERCICE

3. Montrer que si G opère sur E de façon simplement transitive, l'homomorphisme de G dans $\mathcal{S}$ (E) est injectif (autrement dit G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}$ (E)). Que pensez-vous de la réciproque?
4. Montrer que le groupe des isométries du plan vectoriel euclidien qui laissent invariant le vecteur nul n'est pas transitif sur E, et qu'il est transitif, mais non simplement transitif, sur chacun des ensembles de vecteurs de norme donnée.

Théorème.

Si G opère de façon simplement transitive sur E, à tout élément x de E correspond une bijection de G sur E dans laquelle x est image de l'élément neutre de G.

En effet, en faisant correspondre ux à x, on définit une application de G dans E, qui est bijective puisque pour tout y de E il existe un u et un seul tel que $ux = y$. Le seul élément u de G tel que $ux = x$ est e, puisque $ex = x$.

REMARQUE

Ces bijections permettent, par transport de structure, de donner à E des structures de groupes isomorphes à G, chacune d'elles ayant pour élément neutre un élément de E qui peut être choisi a priori arbitrairement.

3. 9 ESPACE AFFINE ASSOCIÉ A UN ESPACE VECTORIEL

Définition.

V étant un espace vectoriel sur un corps K, on dit qu'un ensemble E est muni d'une **structure affine** associée à V (ou est un **espace affine** associé à V) si le groupe additif (V, +) opère de façon simplement transitive sur E.

On reconnaît là la situation déjà rencontrée en Seconde et en Première : dans l'espace géométrique à 3 dimensions, si E est l'ensemble des points et V l'ensemble des vecteurs, à chaque vecteur correspond une bijection de E sur lui-même appelée translation, et à la somme de 2 vecteurs correspond la composée des translations respectives (ce qui est exprimé par : (V, +) opère sur E), mais pour tout couple (M, N) de points de E, il existe un seul vecteur (le vecteur désigné par $\overrightarrow{MN}$) tel que la translation correspondante donne N pour image de M (ce qui est exprimé en disant que (V, +) opère de façon simplement transitive).
Laissant de côté les divers systèmes d'axiomes qui ont pu être utilisés pour parvenir à cette situation, c'est elle-même que nous prendrons pour point de départ. Un espace affine défini comme ci-dessus satisfait à tous les axiomes utilisés en Seconde et en Première, et par suite possède toutes les propriétés que l'on peut déduire de ces axiomes.

EXERCICES

1. Montrer que V peut être muni canoniquement d'une structure d'espace affine associée à V.
2. Soient $V_1, \ldots, V_n$ des K-espaces vectoriels et $E_1, \ldots, E_n$ des espaces affines associés respectivement à $V_1, \ldots, V_n$. Montrer que le produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ a une structure d'espace affine associé au K-espace vectoriel $V_1 \times \ldots \times V_n$. Lorsque $V_1 = \ldots = V_n$ et $E_1 = \ldots = E_n$ le produit $E_1 \times \ldots \times E_n$ est noté E^n.
3. Soit E un espace affine associé au K-espace vectoriel V. Montrer que, I étant un ensemble, l'ensemble $\mathcal{F}$ (I, E) a une structure d'espace affine associé au K-espace vectoriel $\mathcal{F}$ (I, V).

REMARQUE

Si E est un espace affine associé à l'espace vectoriel V, on appelle dimension de E, et on note dim E, la dimension de V. Nous rappelons que l'on appelle droite affine (resp. plan affine) un espace affine de dimension 1 (resp. 2).

On a remarqué (cf. § 3.8, exercice 3) que (V, +), opérant de façon simplement transitive sur E, est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}$ (E) que l'on désignera par T.
La bijection de (V, +) sur T permet de donner à T une structure d'espace vectoriel isomorphe à V.
T sera appelé **l'espace des translations** de E.
Si l'on désigne par $\vec{u}$ un élément de V, on pourra désigner par $t_{\vec{u}}$ la translation correspondante. L'image d'un élément M de E pourra être notée

$$t_{\vec{u}}(M) \quad \text{ou} \quad t_{\vec{u}} + M \quad \text{ou} \quad M + \vec{u}$$

La relation

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in V^2 \qquad t_{\vec{v}+\vec{u}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$$

conduit à la « **Relation de Chasles** » :

$$\forall (M, N, P) \in E^3 \qquad \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$$

puisque

$$\vec{u} = \overrightarrow{MN} \iff t_{\vec{u}}(M) = N$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{NP} \iff t_{\vec{v}}(N) = P$$

et

$$\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{MP} \iff t_{\vec{v}+\vec{u}}(M) = P.$$

Il importe de bien garder présent à l'esprit que dès qu'intervient une structure affine on se trouve en face d'un triplet (E, V, K), où V est un espace vectoriel sur K, et où le groupe additif (V, +) opère sur E de façon simplement transitive. Il y a donc deux opérations externes, une sur V à opérateurs dans K, une sur E à opérateurs dans V; mais il n'y a pas en revanche d'opération externe sur E à opérateurs dans K.
Pour rappeler que la structure affine dont on munit un ensemble est associée à un K-espace vectoriel V, il peut être parfois commode de le noter (E, V) ou (E, V, K).
Il résulte de la remarque finale du paragraphe 8 de cette section qu'à tout élément M d'un espace affine E, associé à V, on peut faire correspondre une bijection de V sur E, à savoir la bijection

$$\vec{u} \longmapsto M + \vec{u}.$$

Celle-ci, par transport de structure, permet de munir l'ensemble E d'une structure d'espace vectoriel isomorphe à V ayant M pour élément neutre.
L'ensemble E muni de cette structure sera noté (E, M) et nous dirons que (E, M) est l'espace vectoriel associé au point M de E.

3. 10 APPLICATIONS AFFINES

E (resp. E′) étant un ensemble muni d'une structure affine associée à un K-espace vectoriel V (resp. V′), il s'agit de définir d'une manière raisonnable ce que l'on va appeler *compatibilité* d'une application de E dans E′, avec les structures affines de E et de E′.

Nous pouvons rapprocher ce cas d'un autre où intervient une opération externe : les applications linéaires d'un espace vectoriel dans un autre.

Si V et V′ sont deux espaces vectoriels sur un corps K, il existe deux opérations externes $\varphi : K \times V \longrightarrow V$ et $\varphi' : K \times V' \longrightarrow V'$. Si l est une application de V dans V′, et i l'identité de K, on peut définir l'application $i \times l$ de K × V dans K × V′ définie pour tout couple $(\alpha, \vec{u})$ par $(i \times l)(\alpha, \vec{u}) = (\alpha, l(\vec{u}))$
Dans ces conditions, la relation

$$\forall \alpha \in K \quad \forall \vec{u} \in V \quad l(\alpha, \vec{u}) = \alpha\, l(\vec{u})$$

qui exprime la compatibilité de l avec les opérations externes, peut être traduite par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} K \times V & \xrightarrow{i \times l} & K \times V' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ V & \xrightarrow{l} & V' \end{array}$$

Dire que ce diagramme est commutatif signifie, par définition, que si l'on part d'un élément quelconque de K × V, l'élément de V′ que l'on obtient en suivant les flèches $i \times l$ et φ' est le même que celui qu'on obtient en suivant les flèches φ et l, autrement dit que $l \circ \varphi' = \varphi \circ (i \times l)$. On peut concevoir pour les espaces vectoriels un cas plus général, celui où V étant un espace vectoriel sur K, le corps K′ sur lequel V′ est un espace vectoriel est différent de K, ou bien où avec K′ = K on voudrait remplacer i par une application ψ moins particulière. Ceci ne sera fécond que si ψ respecte la structure de corps, autrement dit est un homomorphisme de corps. On exigera de ψ, que pour tout couple (α, β), on ait

$$\psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$$
$$\psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha)\, \psi(\beta).$$

Dans ces conditions, on ne parlera d'application linéaire de V dans V′ qu'après s'être donné préalablement un homomorphisme ψ de K dans K′, et la condition de compatibilité avec les opérations externes, s'exprimera par

$$\forall \alpha \in K \quad \forall \vec{u} \in V \quad l(\alpha \vec{u}) = \psi(\alpha)\, l(\vec{u})$$

ou encore par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} K \times V & \xrightarrow{\psi \times l} & K' \times V' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ V & \xrightarrow{l} & V' \end{array}$$

C'est une situation tout à fait analogue à celle-ci que l'on trouve lorsque l'on a deux espaces affines :

E associé à V et E′ associé à V′.

Les deux lois externes φ et φ' sont notées

$$(\vec{u}, M) \longmapsto M + \vec{u} \quad \text{et} \quad (\vec{u}', M') \longmapsto M' + \vec{u}'.$$

Le rôle de ψ va être tenu par une application de V dans V′ respectant leur structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire une application linéaire l de V dans V′.

Nous arrivons alors aux définitions équivalentes suivantes :

Définition 1.

Soient E, E′ deux espaces affines associés respectivement aux K-espaces vectoriels V, V′. On dit qu'une application f de E dans E′ est **affine,** s'il existe une application linéaire l de V dans V′ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V \times E & \xrightarrow{l \times f} & V' \times E' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\ E & \xrightarrow{f} & E' \end{array}$$

Définition 2.

Soient E, E′ deux espaces affines associés respectivement aux K-espaces vectoriels V, V′. On dit qu'une application f de E dans E′ est **affine,** s'il existe une application linéaire l de V dans V′ telle que :

$$\forall M \in E \quad \forall \vec{u} \in V \qquad f\left(M + \vec{u}\right) = f(M) + l\left(\vec{u}\right).$$

EXERCICE

1. Montrer que si f est une application affine de (E, V) dans (E′, V′) l'application linéaire l de V dans V′ que l'on peut lui associer en vertu de la définition est unique.

REMARQUE

Il serait aisé de définir les applications affines dans la situation de deux triplets (E, V, K), (E′, V′, K′). Cela supposerait la donnée d'un homomorphisme ψ de K dans K′ et d'une application linéaire l de V dans V′, telles que

$$\forall \alpha \in K \quad \forall \vec{u} \in V \qquad l(\alpha \vec{u}) = \psi(\alpha)\, l(\vec{u}).$$
$$\forall M \in E \quad \forall \vec{u} \in V \qquad f(M + \vec{u}) = f(M) + l(\vec{u}).$$

EXERCICES

2. Montrer que les translations d'un espace affine (E, V) sont des applications affines de E dans lui-même admettant Id_v pour application linéaire associée.

3. Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des espaces affines associés respectivement aux K-espaces vectoriels $V_1, \ldots, V_n$, on a vu (cf. § 9 exercice 2) que l'on peut munir le produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ d'une structure d'espace affine associée au K-espace vectoriel $V_1 \times \ldots \times V_n$. Alors, si on désigne par p_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) l'application de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans E_i définie pour tout n-uplet de $E_1 \times \ldots \times E_n$ par $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, montrer que p_i est une application affine admettant pour application linéaire associée la $i^{ième}$ projection de $V_1 \times \ldots \times V_n$ sur V_i.

4. Soient (E, V) un espace affine et I un ensemble.
Montrer que si x est un élément fixé de I l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(I, E) & \longrightarrow & E \\ g & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

est affine.

III. Étude géométrique des espaces affines

3. 11 BARYCENTRES

Théorème et définition.

Soient $(M_i)_{i\in I}$ une famille de points d'un espace affine E, associé au K-espace vectoriel V, et $(\alpha^i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de K à support fini.
Considérons un point P de E; alors

(i) si $\sum_{i\in I} \alpha^i \neq 0$, le point M de E défini par $\left(\sum_{i\in I}\right) \alpha^i\, \overrightarrow{PM} = \sum_{i\in I} \alpha^i\, \overrightarrow{PM_i}$ ne dépend pas du choix de P, on dit que M est le **barycentre** des points M_i affectés des coefficients α^i.

(ii) Si $\sum_{i\in I} \alpha^i = 0$, le vecteur $\sum_{i\in I} \alpha^i\, \overrightarrow{PM_i}$ de V ne dépend pas du choix de P.

Soit Q un point de E distinct de P; on a

$$\sum_{i\in I} \alpha^i\, \overrightarrow{QM_i} = \sum_{i\in I} \alpha^i\, (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM_i})$$
$$= \left(\sum_{i\in I} \alpha^i\right) \overrightarrow{QP} + \sum_{i\in I} \alpha^i\, \overrightarrow{PM_i}.$$

Alors

(i) Si $\sum_{i\in I} \alpha^i \neq 0$ on a, avec les notations du théorème,

$$\sum_{i\in I} \alpha^i\, \overrightarrow{QM_i} = \left(\sum_{i\in I} \alpha^i\right) \overrightarrow{QP} + \left(\sum_{i\in I} \alpha^i\right) \overrightarrow{PM}$$
$$= \left(\sum_{i\in I} \alpha^i\right) (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM})$$
$$= \left(\sum_{i\in I} \alpha^i\right) \overrightarrow{QM}$$

ce qui prouve bien que M est indépendant du choix de P.

(ii) Si $\sum_{i\in I} \alpha^i = 0$ on a $\sum_{i\in I} \alpha^i\, \overrightarrow{QM_i} = \sum_{i\in I} \alpha^i\, \overrightarrow{PM_i}$

donc le vecteur obtenu est bien indépendant du choix de P.
Il résulte immédiatement de l'énoncé (i) du théorème précédent que l'on a :

Corollaire.

Si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille de points de E et $(\alpha^i)_{i\in I}$ une famille de scalaires, à support fini, telle que $\sum_{i\in I} \alpha^i \neq 0$, le barycentre des M_i affectés des coefficients α^i est le point M tel que :

$$\sum_{i\in I} \alpha^i\, \overrightarrow{MM_i} = \vec{0}.$$

Si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille de points de E, on dira alors qu'un point M de E est un barycentre de la famille $(M_i)_{i\in I}$, ou plus brièvement des M_i, s'il existe une famille $(\alpha^i)_{i\in I}$ d'éléments de K, à support fini, telle que $\sum_{i\in I} \alpha^i \neq 0$ et que M soit le barycentre des points M_i affectés des coefficients α^i.

EXERCICE

1. Montrer que si M est le barycentre des points M_i affectés des coefficients α^i, pour tout scalaire non nul λ, M est le barycentre des points M_i affectés des coefficients $\lambda\alpha^i$. En déduire que si M est un barycentre des points M_i il existe une famille $(\beta^i)_{i\in I}$ de $K^{(I)}$ telle que $\sum_{i\in I} \beta^i = 1$ et que M soit le barycentre des points M_i affectés des coefficients β^i.

Nous utiliserons, dans la suite, la notation très pratique suivante :

si $\quad (\alpha^i)_{i\in I} \in K^{(I)} \quad$ et $\quad \sum_{i\in I} \alpha^i = 0$ ou 1

on désignera par

$$\sum_{i\in I} \alpha^i M_i$$

- le barycentre des M_i affectés des coefficients α^i, lorsque $\sum_{i\in I} \alpha^i = 1$;
- le vecteur $\sum_{i\in I} \alpha^i \overrightarrow{PM_i}$, où P est un point quelconque de E, lorsque $\sum_{i\in I} \alpha^i = 0$.

En particulier si M et N sont deux points de E, N − M désignera donc le vecteur

$$\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MN}.$$

Il est très important d'avoir toujours en mémoire que l'expression $\sum_{i\in I} \alpha^i M_i$ n'a de sens que pour les familles $(\alpha^i)_{i\in I}$ de $K^{(I)}$ telles que $\sum_{i\in I} \alpha^i = 0$ ou 1.

Nous rappelons :

Définition.

Si M_1 et M_2 sont deux points d'un espace affine E associé à un espace vectoriel V sur un corps K de caractéristique différente de 2, on appelle **milieu** de M_1 et de M_2 le barycentre des points M_1 et M_2 affectés de coefficients égaux et non nuls.

Le milieu de M_1 et de M_2 est donc le point M de E qui vérifie

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} = \vec{0} \ ,$$

point qu'avec nos conventions nous pouvons noter

$$\frac{1}{2} M_1 + \frac{1}{2} M_2 \ \text{ ou encore, par abus d'écriture, } \frac{M_1 + M_2}{2}.$$

Théorème.

Soient $(M_i)_{i\in I}$ une famille de points d'un espace affine E et $(\alpha^i)_{i\in I}$ une famille de scalaires, à support fini, telle que $\sum_{i\in I} \alpha^i \neq 0$.

Si $I = J \cup L$ est une partition de I (*i.e.* $J \cap L = \varnothing$) telle que l'on ait

$$\sum_{j\in J} \alpha^j \neq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{l\in L} \alpha^l \neq 0 \ ,$$

on note M_J (resp. M_L) le barycentre des points $(M_j)_{j\in J}$ (resp. $(M_l)_{l\in L}$) affectés des coefficients $(\alpha^j)_{j\in J}$ (resp. $(\alpha^l)_{l\in L}$). Alors, le barycentre M des points $(M_i)_{i\in I}$ affectés des coefficients $(\alpha^i)_{i\in I}$ est le barycentre de M_J et M_L affectés respectivement des coefficients $\sum_{j\in J} \alpha^j$ et $\sum_{l\in L} \alpha^l$.

Ceci résulte des égalités suivantes :

$$\left(\sum_{j\in J} \alpha^j\right) \overrightarrow{MM_J} + \left(\sum_{l\in L} \alpha^l\right) \overrightarrow{MM_L} = \sum_{j\in J} \alpha^j \overrightarrow{MM_j} + \sum_{l\in L} \alpha^l \overrightarrow{MM_l}$$

$$= \sum_{i\in I} \alpha^i \overrightarrow{MM_i}$$

$$= \vec{0}$$

EXERCICES

2. Généraliser le résultat précédent au cas où l'on considère une partition finie $I = \bigcup_{h=1}^{n} I_h$ de l'ensemble des indices.
3. On considère une partition quelconque $I = \bigcup_{h\in H} I_h$ de I. $(\alpha^i)_{i\in I}$ étant une famille d'éléments de K à support fini, montrer que la famille d'éléments de K, indexée par H, et définie par
$$\beta^h = \sum_{i\in I_h} \alpha^i$$
est à support fini.
Généraliser à ce cas le résultat précédent.

3. 12 REPÈRES D'UN ESPACE AFFINE

a) Repères affines.

Définition.

Soit E un espace affine. On dit qu'une famille $(M_i)_{i\in I}$ de points de E est un **repère affine** si pour tout point M de E il existe une unique famille $(\alpha^i)_{i\in I}$ de $K^{(I)}$ telle que

$$\sum_{i\in I} \alpha^i = 1 \quad \text{et} \quad M = \sum_{i\in I} \alpha^i M_i.$$

Cette famille $(\alpha^i)_{i\in I}$ de $K^{(I)}$ est appelée famille des **coordonnées barycentriques** de M dans le repère affine $(M_i)_{i\in I}$.

EXERCICES

1. Montrer qu'une famille $(M_i)_{i \in I}$ de points de E est un repère affine si et seulement si tout point M de E est un barycentre de la famille $(M_i)_{i \in I}$ et si chaque point M, n'est barycentre de la famille $(M_i)_{i \in I}$ que d'une seule façon.
Montrer que cette dernière condition est équivalente à la suivante :
$\forall j \in I \quad M_j$ n'est pas barycentre de la famille $(M_i)_{i \in I - \{j\}}$.

2. Soit $(M_i)_{i \in I}$ un repère affine de E.
Considérons une famille $(P_j)_{j \in J}$ de points de E et une famille $(\beta^j)_{j \in J}$ de $K^{(J)}$ telle que $\sum_{j \in J} \beta^j = 1$.
On désigne, pour tout j de J, par $(\alpha^i_j)_{i \in I}$ la famille des coordonnées de P_j dans le repère $(M_i)_{i \in I}$, et par $(\alpha^i)_{i \in I}$ la famille des coordonnées de $P = \sum_{j \in J} \beta^j P_j$ dans ce même repère. Montrer que l'on a
$$\forall i \in I \quad \alpha^i = \sum_{j \in J} \beta^j \alpha^i_j.$$
Comment peut-on énoncer ce résultat?

On peut caractériser aussi les repères affines, de la manière suivante :

Théorème.

Soit E un espace affine associé au K-espace vectoriel V. Une famille $(M_i)_{i \in I}$ de points de E est un repère affine si et seulement si pour tout vecteur $\vec{u}$ de V il existe une unique famille $(\alpha^i)_{i \in I}$ de $K^{(I)}$ telle que
$$\sum_{i \in I} \alpha^i = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} = \sum_{i \in I} \alpha^i M_i.$$

Supposons d'abord que $(M_i)_{i \in I}$ est un repère affine.
Si M est un point de E et $\vec{u}$ un vecteur de V, on peut écrire
$$M = \sum_{i \in I} \beta^i M_i \quad \text{avec} \quad (\beta^i)_{i \in I} \in K^{(I)} \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \beta^i = 1$$
et
$$M + \vec{u} = \sum_{i \in I} \gamma^i M_i \quad \text{avec} \quad (\gamma^i)_{i \in I} \in K^{(I)} \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \gamma^i = 1.$$
Il en résulte que, en posant $\forall i \in I \quad \alpha^i = \gamma^i - \beta^i$, on a
$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \alpha^i M_i \quad \text{avec} \quad (\alpha^i)_{i \in I} \in K^{(I)} \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \alpha^i = 0.$$
Si l'on a aussi $\vec{u} = \sum_{i \in I} \alpha'^i M_i$ avec $(\alpha'^i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ et $\sum_{i \in I} \alpha'^i = 0$, on en déduit
$$M + \vec{u} = \sum_{i \in I} (\beta^i + \alpha'^i) M_i$$
et, en vertu de l'unicité des coefficients,
$$\forall i \in I \quad \gamma^i = \beta^i + \alpha'^i \quad \text{d'où} \quad \forall i \in I \quad \alpha'^i = \alpha^i.$$
Montrons maintenant la réciproque.

Si M est un barycentre des points M_i, on peut écrire
$$M = \sum_{i \in I} \beta^i M_i \quad \text{avec} \quad (\beta^i)_{i \in I} \in K^{(I)} \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \beta^i = 1.$$
Supposons que l'on ait aussi
$$M = \sum_{i \in I} \beta'^i M_i \quad \text{avec} \quad (\beta'^i)_{i \in I} \in K^{(I)} \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \beta'^i = 1,$$
il en résulte que le vecteur nul $\vec{0}$ s'écrit
$$\vec{0} = \sum_{i \in I} (\beta^i - \beta'^i) M_i$$
et comme il y a unicité des coefficients, $\forall i \in I \quad \beta^i = \beta'^i$.
Pour conclure vérifions que tout point M de E est barycentre des M_i : soit P un barycentre des M_i, on a d'une part
$$P = \sum_{i \in I} \gamma^i M_i \quad \text{où} \quad (\gamma^i)_{i \in I} \in K^{(I)} \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \gamma^i = 1,$$
et d'autre part
$$\overrightarrow{PM} = \sum_{i \in I} \alpha^i M_i \quad \text{où} \quad (\alpha^i)_{i \in I} \in K^{(I)} \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} \alpha^i = 0.$$
On obtient alors
$$M = P + \overrightarrow{PM} = \sum_{i \in I} (\gamma^i + \alpha^i) M_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i \in I} (\gamma^i + \alpha^i) = 1.$$

b) Repères cartésiens.

Définition.

Soit E un espace affine associé à un K-espace vectoriel V. On appelle **repère cartésien** de E tout couple $\left(O, (\vec{e_i})_{i \in I}\right)$ où O est un point de E, appelé origine, et $(\vec{e_i})_{i \in I}$ une base de V.

REMARQUE

Si E est réduit à un point, on a $V = \{\vec{0}\}$ et E n'a pas de repère cartésien. Si E possède au moins deux points, V n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$; par suite V possède des bases et en conséquence E possède des repères cartésiens.

EXERCICE

1. Si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est un n-uplet de vecteurs de V et O un point de E, montrer que le couple $\left(O, (\vec{e_i})_{i \in \{1, \ldots, n\}}\right)$ est un repère cartésien de E si et seulement si la famille $(M_i)_{i \in \{0, \ldots, n\}}$, où $M_0 = O$ et $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad M_i = O + \vec{e_i}$, est un repère affine de E.
En déduire que si E est un espace affine de dimension n, tout repère affine de E est une famille de points de E indexée par un ensemble à $n+1$ éléments.

CONSÉQUENCES

1. Sur une droite affine, un repère affine est constitué de deux points distincts.
2. Dans un plan affine, un repère affine est constitué de trois points non alignés.
3. Dans un espace affine de dimension 3, un repère affine est constitué de quatre points non coplanaires.

Définition.

Soit E un espace affine associé au K-espace vectoriel V. Si $\left(O, (\vec{e_i})_{i \in I}\right)$ est un repère cartésien de E on appelle **coordonnées cartésiennes** d'un point M de E les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{e_i})_{i \in I}$ de V.

EXERCICE

2. Les notations sont celles de la définition précédente.

Soit $(P_j)_{j \in J}$ une famille de points de E et $(\beta_j)_{j \in J}$ une famille de $K^{(J)}$ telle que $\sum_{j \in J} \beta^j = 1$.

On désigne, pour tout j, par $(\alpha_j^i)_{i \in I}$ les coordonnées cartésiennes de P_j, et par $(\alpha^i)_{i \in I}$ les coordonnées cartésiennes de $P = \sum_{j \in J} \beta^j P_j$.

Montrer que l'on a

$$\forall i \in I \qquad \alpha^i = \sum_{j \in J} \beta^j \alpha_j^i.$$

Donner un énoncéde ce résultat.

3. *Changement de repère cartésien.*

Soit E un espace affine de dimension n. On considère deux repères cartésiens de E : $\left(O, (\vec{e_i})_{i \in \{1, \ldots, n\}}\right)$ et $\left(O', (\vec{e}'_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}\right)$.

Étant donné un point M de E on notera X (resp. X') la matrice colonne de ses coordonnées dans le 1er repère (resp. le 2e).

Soit P la matrice de $\mathcal{M}_{n,n}$ (K) représentant Id_V dans les bases $(\vec{e_i})_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ et $(\vec{e}'_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$.

De la relation

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$$

déduire $X' = X'_0 + PX$ où X'_0 est la matrice colonne des coordonnées de O dans le 2e repère.

De même $X = X_{O'} + P^{-1} X'$ où $X_{O'}$ est la matrice colonne des coordonnées de O' dans le 1er repère.

REMARQUES SUR LA FIGURATION DES ESPACES AFFINES ET DES ESPACES VECTORIELS

Un très vieil adage dit que la géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses, est assigne par-là aux figures un rôle mineur dans le travail du mathématicien. S'il est vrai qu'une figure ne prouvera jamais rien, et ne peut suppléer ni le calcul ni le raisonnement, elle peut en revanche avoir une valeur suggestive, quelquefois très forte, et il est douteux qu'il existe des mathématiciens qui ne s'aident pas de figures ou de schémas au cours de leurs recherches, même les plus abstraites : le folklore mathématique fourmille d'anecdotes où un mathématicien, arrêté par une difficulté au cours d'un exposé, ne repart qu'après avoir dessiné dans un coin du tableau un croquis mystérieux, quelquefois intelligible de lui seul.

On peut distinguer plusieurs espèces assez différentes de figures. Citons-en quelques unes :

(i) *les épures* du dessin industriel ou du dessin d'architecture et qui ont pour but de donner une représentation précise d'objets réalisés ou à réaliser, en utilisant les procédés de la géométrie descriptive ou de la géométrie cotée;

(ii) *les schémas géométriques* qui, faits en général « en perspective », ont pout but d'extraire d'une situation géométrique les éléments essentiels sur lesquels s'appuieront raisonnements ou calculs, ou d'illustrer par un schéma géométrique, une situation géométrique (en utilisant un isomorphisme, par exemple en faisant une figure pour représenter les propriétés d'un espace vectoriel de dimension 3 sur ℝ dont les éléments sont des fonctions; ou moins rigoureusement, en utilisant une analogie, par exemple en faisant une figure pour suggérer les propriétés d'un espace vectoriel sur un corps qui n'est plus forcément ℝ, ou dont la dimension est supérieure à 3);

(iii) *les diagrammes*, dans lesquels les tracés géométriques ont une valeur purement symbolique : graphes sagittaux représentant des relations, diagrammes représentant les diverses applications entrant en jeu dans une question (cf. § 3.10).

Les figures de l'un ou l'autre type peuvent servir à faciliter la compréhension personnelle ou à assurer la communication d'information, ces deux fins n'étant ni incompatibles, ni nécessairement solidaires.

Un problème très intéressant, qui relève autant de la psychologie que des mathématiques, est de savoir quelles qualités doivent posséder les figures pour atteindre pleinement les objectifs rappelés ci-dessus.

Nous n'aborderons ici, et sans chercher à l'épuiser, que le cas des schémas géométriques aux fins de communication.

De tels schémas évoquent directement des propriétés des espaces affines de dimension 1, 2 ou 3 (mais sont souvent utilisés — par analogie — pour faire naître une intuition qui se déploierait dans des espaces de dimension supérieure à 3).

L'élément de base de ces schémas est la représentation du point : que l'instrument soit le crayon, la plume ou la craie, on le pose sur le papier ou le tableau pour obtenir une tache aussi petite que possible, mais cependant visible. Il est clair que l'on ne va pas représenter de la sorte tous les points de l'espace (le résultat serait une feuille noircie ou un tableau blanchi!) : on ne le fera que pour les points qui jouent un rôle important dans le calcul ou le raisonnement que l'on veut mener à bien. De même, deux points distincts déterminent une droite que l'on ne tracera pas toujours : la tracer consistant à dessiner à la main, ou à la règle, un trait qui absorbe les taches figurant les deux points. La qualité du schéma dépendra du choix judicieux des éléments à figurer et de la disposition de leurs figurations dans le schéma. Un principe simple qui semble un guide efficace est le suivant : le schéma doit mettre en évidence un repère (affine ou cartésien) permettant une détermination simple des principaux éléments de la situation à étudier.

Donnons-en quelques exemples :

(i) *Figuration des vecteurs.*

Comme nous l'avons dit, les figures représentent directement des points d'un espace affine de dimension au plus égale à 3, et des parties de cet espace. Les vecteurs que l'on peut représenter le plus immédiatement sont ceux de l'espace vectoriel auquel est associé l'espace affine. Cependant un tel vecteur n'est pas une partie de cet espace affine; c'est, jouant sur des isomorphismes canoniques bien connus, ou bien une translation, c'est-à-dire une transformation de cet espace, ou bien le graphe de cette translation, c'est-à-dire une classe d'équipollence de bipoints. On peut marquer sur le schéma les points a et b du bipoint (a, b). On ne tracera bien sûr pas « tous » les bipoints d'une classe, on se contentera d'en tracer un, sachant que l'on pourra tracer tout autre bipoint de la même classe dont on pourrait avoir besoin, grâce à la convention — rarement formulée,

mais toujours utilisée — que la figure est le résultat de la projection de l'espace sur un plan parallèlement à une certaine direction de droites, étant bien entendu qu'aucune droite à figurer n'aura l'inconvenance d'avoir la direction des projetantes. Dans ces conditions, (a, b) et (c, d) seront équipollents si et seulement si sur le schéma les taches qui les représentent sont les sommets d'un parallélogramme (fig. 1).

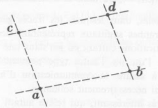


fig.1

Tracer les deux points a et b est suffisant pour déterminer le vecteur $\overrightarrow{ab}$, et il y aura souvent lieu de s'en tenir là, pour ne pas surcharger la figure en y traçant des éléments inutiles. Mais on peut ressentir dans certains cas le besoin, qu'il n'y a pas lieu de réprimer, de faire apparaître de façon plus frappante certains vecteurs de la figure, et on pourra joindre a à b par une flèche courbe (ceci peut être très suggestif du lien entre addition des vecteurs et composition des translations) ou par une flèche rectiligne (fig. 2)

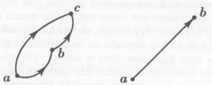


fig. 2

qui est sans danger si l'on sait bien que le vecteur $\overrightarrow{ab}$ n'est pas le segment $[a\ ,\ b]$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{ab}$ est égale à la distance $d\,(a, b)$ des points a et b (pour la distance associée à la norme). Si la norme est la norme euclidienne, la distance $d\,(a, b)$ est aussi la longueur usuelle du segment $[a\ ,\ b]$: la représentation de la figure fait donc apparaître la norme de $\overrightarrow{ab}$ sous forme de longueur de $\overrightarrow{ab}$; ceci peut passer aux yeux de certains pour un mérite de la représentation par une flèche rectiligne, et être critiqué par d'autres qui feront remarquer que la longueur ne peut être mesurée sur le schéma (sauf si on travaille dans le plan), que la notion de longueur et celle de distance gagnent à être distinguées l'une de l'autre et qu'enfin la norme euclidienne n'est pas la seule norme que l'on ait à utiliser dans les espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
Lorsque plusieurs vecteurs interviennent dans la question, il est souvent commode de les représenter par des bipoints ayant tous même premier élément.

Si O est cet élément nous retrouvons alors la figure de la bijection canonique de l'espace affine sur l'espace vectoriel qui au point O associe le vecteur nul. On peut alors estimer que chaque point tracé sur la figure représente indifféremment un point m de l'espace affine ou un vecteur $\overrightarrow{Om}$ de l'espace vectoriel — à condition évidemment de ne faire jouer le rôle de O qu'à ce seul point.

Et ceci nous amène à la représentation des éléments d'un espace vectoriel V que l'on étudie pour lui-même et non comme espace auquel est associé un espace affine, car ce que l'on fait alors pour représenter les éléments de V, c'est se ramener à la situation précédente, et considérer V comme espace affine associé à lui-même. Dans ces conditions, chaque vecteur est représenté par un point.

Mais il faut rappeler ici une fois de plus, et garder constamment présent à l'esprit l'isomorphisme entre V et l'espace des translations de V qui à un vecteur f fait correspondre la translation $x \longrightarrow x + v$ de V sur V. Sur le schéma, nous pouvons considérer que chaque vecteur v (en tant qu'élément de V) est représenté par un point, mais qu'il est aussi représenté (en tant que translation de V) par la classe des bipoints $(x, x + v)$ ou par l'un de ces bipoints.

Nous retrouvons une remarque déjà faite : un élément mathématique n'est pas intrinsèquement un point ou un vecteur, si l'on tient — ce qui est raisonnable — à appeler point un élément d'un espace affine, et vecteur un élément d'un espace vectoriel; tout élément d'un espace vectoriel est un point de cet espace vectoriel muni de sa structure affine canonique, tout élément d'un espace affine E est un vecteur dans chacun des espaces vectoriels (E, M).

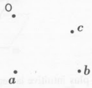


fig. 3

Autrement dit la figure 3 peut être interprétée en disant :

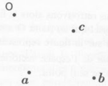
1. O, a, b, c sont les points d'un espace affine E, (O, a), (O, b), (O, c) sont les bipoints de premier élément O qui permettent de définir les vecteurs $\overrightarrow{Oa}$, $\overrightarrow{Ob}$, $\overrightarrow{Oc}$.

2. O, a, b, c sont les éléments d'un espace vectoriel V, O en étant le vecteur nul. Le vecteur représenté par le point a peut aussi l'être par le bipoint (O, a).

L'identification de l'espace affine E à l'espace vectoriel (E, O) conduit de l'interprétation à l'interprétation 2; la considération de la structure affine canonique de l'espace vectoriel V conduit de l'interprétation 2 à l'interprétation 1.

En conclusion, il faut autant réfléchir pour faire une figure utile et pour se servir d'une figure que pour faire un raisonnement; en fait, tracer intelligemment la figure, c'est souvent commencer le raisonnement.

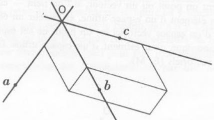
fig. 4



(ii) *Figuration des repères.*

La figuration d'un repère d'un espace affine de dimension 3 comportera toujours 4 point distincts O, *a*, *b*, *c*; la même figure (fig. 4) peut être interprétée comme représentan le repère affine constitué du quadruplet (O, *a*, *b*, *c*) ou comme représentant le repè cartésien constitué du point O et du triplet de vecteurs $(\overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{Ob}, \overrightarrow{Oc})$. Dans le secon cas, l'usage prévaut souvent de tracer les droites O*a*, O*b*, O*c*, parce qu'on pense que ce droites peuvent être graduées et qu'on peut alors lire sur les graduations les coordon nées cartésiennes d'un point *m* (fig. 5).

fig. 5



On considère souvent comme plus intuitive la représentation cartésienne, où à chaque point et chaque vecteur correspond le triplet de ses coordonnées, que la représentation barycentrique, où à chaque point (resp. vecteur) correspond le quadruplet de ses coordonnées barycentriques de somme égale à 1 (resp. 0).

On peut justifier cette opinion par le fait que la représentation cartésienne met plus nettement en évidence le rôle de l'espace vectoriel auquel est associé l'espace affine, mais elle a aussi certainement pour origine que la plupart de ceux qui ont pratiqué les mathématiques ont beaucoup plus l'habitude de la représentation cartésienne que de la représentation barycentrique et que leur intuition est moins sûre en ce qui concerne cette dernière.

EXERCICE

(i) Étant donné un repère affine (A, B, C) dans un plan affine associé à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et (α, β, γ) étant les coordonnées barycentriques du point M, quels sont les ensembles respectivement caractérisés par $\alpha = 0$, $\alpha > \beta$, $\alpha \geqslant \beta$.

(ii) Montrer que chacune des sept régions déterminées dans ce plan par les droites (AB), (BC), (CA) est caractérisée par le triplet des signes des coordonnées barycentriques de ses points.

fig. 6

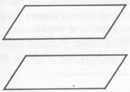
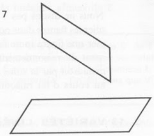


fig. 7



(iii) *Figuration des plans.*

La première réaction de quiconque à qui l'on présente les deux figures ci-dessous (fig. 6 et 7) sera de dire que la figure 6 représente deux plans parallèles (cf. § 3.13. e) et la figure 7 deux plans non parallèles.

Quelques secondes de réflexion permettent de constater que la figure 7 peut très bien représenter les projections sur un plan de deux parallélogrammes situés dans deux plans parallèles.

Il est cependant possible de justifier la réaction spontanée.

On peut estimer qu'en fait chaque plan est déterminé dans chaque figure par un repère $(O, \overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{Ob})$, $(O_1, \overrightarrow{O_1a_1}, \overrightarrow{O_1b_1})$ (cf. fig. 8 et 9) :

fig. 8

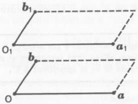
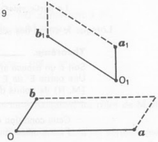


fig. 9



On interprète la figure 8 en pensant que $\overrightarrow{Oa} = \overrightarrow{O_1a_1}$ et $\overrightarrow{Ob} = \overrightarrow{O_1b_1}$, ce qui implique le parallélisme des plans et signifie, qu'un repère ayant été choisi dans l'un d'eux on a choisi un repère commodément associé au premier dans le second plan.

Dans la figure 9, on ne pourra décider du parallélisme des deux plans que si l'on sait si $\overrightarrow{O_1a_1}$ et $\overrightarrow{O_1b_1}$ sont, ou non, des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{Oa}$ et $\overrightarrow{Ob}$; mais si les plans sont parallèles, et si le choix des deux repères $(O, \overrightarrow{Oa}, \overrightarrow{Ob})$ et $(O_1, \overrightarrow{O_1a_1}, \overrightarrow{O_1b_1})$ n'a pas été imposé par une particularité du problème, ce choix a été maladroit.

Nous voyons donc que la figure intuitivement la plus satisfaisante est aussi celle qui permet de mettre le plus facilement en évidence des repères commodes.

EXERCICE

Faire une étude, analogue à la précédente, de la représentation d'une droite parallèle à un plan (cf. § 3.13.e), de deux plans sécants, d'une droite et d'un plan sécants, de deux droites non coplanaires.

En conclusion, il est raisonnable de donner le conseil : « Faites des figures », en précisant : « Faites **vos** figures, et faites-les aussi simples que possible. »

Nous ne disons pas : « Regardez des figures », et nous n'avons pas cru devoir multiplier les figures dans notre texte, car ce qui aide la compréhension, ce n'est pas de contempler une figure toute faite, mais de construire la figure au fur et à mesure du développement du raisonnement, et au besoin de la recommencer, si le premier essai se révèle maladroit par la suite. Il est même souvent préférable de tracer plusieurs figures simples au cours d'un raisonnement que de vouloir tout condenser sur le même dessin.

3. 13 VARIÉTÉS LINÉAIRES AFFINES

a) Définition. Premières propriétés.

Nous avons vu au chapitre 1 que dans un espace vectoriel, un sous-espace vectoriel était caractérisé par le fait qu'il contenait toutes les combinaisons linéaires que l'on pouvait former avec ses éléments.

Dans un espace affine, nous allons nous intéresser aux parties qui contiennent tous les barycentres que l'on peut former avec leurs éléments.

Définition.

Une partie E′ d'un espace affine E est appelée **variété linéaire affine** de E si tout barycentre d'éléments de E′ appartient à E′.

REMARQUE

La partie vide $\varnothing$ est une variété linéaire affine de E.

Lorsque le corps des scalaires K est $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous allons montrer :

Théorème.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel V sur le corps $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une partie E′ de E est une variété linéaire affine si et seulement si pour tout couple (M, N) de points de E′, tout barycentre de M et N appartient à E′.

Cette condition est évidemment nécessaire.
Pour montrer qu'elle est suffisante, nous devons vérifier que pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ de points de E′ et pour toute famille $(\alpha^i)_{i\in I}$ de $K^{(I)}$ telle que $\sum_{i\in I}\alpha^i \neq 0$ le barycentre M des points M_i affectés des coefficients α^i appartient à E′.
Notre hypothèse est que ce résultat est vrai lorsque card $\{i \mid i\in I, \alpha^i \neq 0\} = 2$.
Nous allons procéder par récurrence sur ce cardinal et supposer le résultat vrai chaque fois que card $\{i \mid i\in I, \alpha^i \neq 0\} < n$.

Alors, si $(\alpha^i)_{i\in I}$ est une famille de $K^{(I)}$, telle que l'on ait $\alpha = \sum_{i\in I}\alpha^i \neq 0$ et card $\{i \mid i\in I, \alpha^i \neq 0\} = n$, il existe un indice i_n tel que

$$\alpha_{i_n} \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{i_n} \neq \alpha$$

(sinon tous les coefficients non nuls seraient égaux à α et, leur somme étant alors $n\alpha$, on aurait $n\alpha = \alpha$, ce qui dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est impossible).
Par suite si $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{n-1}}$ sont les autres coefficients non nuls, on a

$$\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_{n-1}} = \alpha - \alpha_{i_n} \neq 0.$$

Désignons par N le barycentre des points $M_{i_1}, \ldots, M_{i_{n-1}}$ affectés des coefficients $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{n-1}}$. Nous avons vu au paragraphe 11 que, dans ces conditions M est le barycentre des points N et M_{i_n} affectés des coefficients $\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_{n-1}}$ et α_{i_n}.
Comme, d'après notre hypothèse de récurrence, N appartient à E′, M est le barycentre de deux éléments de E′ donc appartient à E′.

Le théorème suivant permet de caractériser les variétés linéaires affines de E :

Théorème.

Soit E un espace affine associé à K-espace vectoriel V. Une partie non vide E′ de E est une variété linéaire affine de E si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel V′ de V tel que la restriction de la loi externe $V \times E \longrightarrow E$ à $V' \times E'$ munisse E′ d'une structure d'espace affine associée au K-espace vectoriel V′. On dit alors que V′ est la **direction** de la variété linéaire affine E′.

Supposons d'abord que E′ est une variété linéaire affine et considérons l'ensemble $V' = \{\overrightarrow{MN} / N \in E'\}$ où M est un point de E′ fixé.
Nous allons vérifier que V′ est une partie stable, donc un sous-espace vectoriel, de V :
• si N est un point de E′ et α un élément de K, le point P, défini par $\overrightarrow{MP} = \alpha\,\overrightarrow{MN}$, est le barycentre de M et N affectés respectivement des coefficients $1-\alpha$ et α, puisque l'on a

$$(1-\alpha)\,\overrightarrow{MM} + \alpha\,\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP}.$$

Comme E′ est une variété linéaire affine P appartient à E′; on en déduit que $\overrightarrow{MP} \in V'$ donc que $\alpha\,\overrightarrow{MN} \in V'$;
• si N et P sont deux points de E′, le point Q défini par $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$ est le barycentre de N, P, M affectés respectivement des coefficients 1, 1, -1, puisque l'on a

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MM}.$$

Il en résulte que Q appartient à E′ et donc que $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$ appartient à V′.
Montrons maintenant que V′ ne dépend pas du choix de M dans E′ :
si P est un autre point de E′, on a

$$\forall N \in E' \quad \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{PN} \in V'$$

ce qui montre que $\{\overrightarrow{PN} \mid N \in E'\} \subset \{\overrightarrow{MN} \mid N \in E'\}$;

comme on a évidemment l'inclusion dans l'autre sens en échangeant les rôles de M et P, deux ensembles sont égaux.
Enfin, E′ a une structure d'espace affine associé à V′. Il suffit pour cela de vérifier que

$$\forall P \in E' \quad \forall \vec{u} \in V' \quad P + \vec{u} \in E'.$$

Or, si P est un point de E′ et $\vec{u}$ un vecteur de V′, comme $V' = \{\overrightarrow{PN} \mid N \in E'\}$ il existe un point N de E′ tel que $\overrightarrow{PN} = \vec{u}$ et on a $P + \vec{u} = P + \overrightarrow{PN} = N$, donc $P + \vec{u} \in E'$.
Pour démontrer la réciproque, considérons une famille $(M_i)_{i\in I}$ de points de E′ et une famille $(\alpha^i)_{i\in I}$ d'éléments de K, à support fini, telle que $\sum_{i\in I}\alpha^i \neq 0$. Soit M le barycentre des points M_i affectés des coefficients α_i. Alors si P est un point de E′, on a

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\sum_{i\in I}\alpha^i\,\overrightarrow{PM_i}}{\sum_{i\in I}\alpha^i},$$

et comme $\forall\, i \in I \quad \overrightarrow{PM_i} \in V'$, le vecteur $\overrightarrow{PM}$ appartient à V′ et donc M appartient à E′ ce qui prouve que E′ est bien une variété linéaire affine de E.

NOTATION

Si E′ est une variété linéaire affine non vide de direction V′ et M un point de E′, on vient de montrer que l'on a

$$E' = \{M + \vec{u} \mid \vec{u} \in V'\}$$

ce que l'on écrira souvent $\qquad E' = M + V'.$

De l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned}(E, M) &\longrightarrow V\\ N &\longmapsto \overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

et du théorème précédent, résulte que si M est un point de E, l'application qui à un sous-espace vectoriel V′ de V associe la variété linéaire affine M + V′ est une bijection de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de (E, M).

Autrement dit :

Corollaire.

Il existe une bijection canonique de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de (E, M) sur l'ensemble des variétés linéaires affines de E contenant M.

b) Exemples de variétés linéaires affines.

1. Droites.

Définition.

Soit E un espace affine associé à K-espace vectoriel V. On appelle **droite** de E toute variété linéaire affine non vide ayant pour direction une droite vectorielle de V, autrement dit une variété linéaire affine de dimension 1.

Si E′ est une droite de E de direction V′, tout vecteur non nul de V′ est appelé **vecteur directeur** de E′.

Il résulte de *a)* qu'une droite E′ est parfaitement déterminée

- soit par la donnée de deux points distincts M, N de E′; on la note alors (MN);
- soit par la donnée d'un point M de E′ et d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de E′; on la note alors $D(M, \vec{u})$.

Définition.

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite E′ de E et M_1, M_2 deux points de E′, on appelle **mesure algébrique** du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ par rapport à $\vec{u}$, l'unique scalaire α, noté $\overline{M_1M_2}$, tel que $\overrightarrow{M_1M_2} = \alpha\vec{u}$.

EXERCICE

1. Montrer que si M_1, M_2, M_3 sont trois points de la droite E′, et $\vec{u}$ un vecteur directeur de E′ on a

$$\overline{M_1M_3} = \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3}$$

et

$$\overline{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \overline{M_1M_3} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}.$$

Définition.

Lorsque E est un espace affine associé à un espace vectoriel V sur ℝ, on appelle **demi-droite** d'origine M et de vecteur directeur $\vec{u}$, l'ensemble des points P de E tels que $\overrightarrow{MP} = \lambda\vec{u}$ où λ est un réel positif ou nul.

Par suite si E′ est la droite de E déterminée par M et $\vec{u}$, E′ est réunion de la demi-droite E'_1 d'origine M et de vecteur directeur $\vec{u}$ et de la demi-droite E'_2 d'origine M et de vecteur directeur $-\vec{u}$; de plus on a $E'_1 \cap E'_2 = \{M\}$.

Définition.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel V sur ℝ. Étant donnés deux points P et Q de E, on appelle **segment** d'origine P et d'extrémité Q l'ensemble, noté [P, Q], des barycentres des points P et Q affectés de coefficients positifs.

Autrement dit :

$$M \in [P, Q] \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \ \exists \beta \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \alpha + \beta \neq 0 \text{ et } \alpha\,\overrightarrow{MP} + \beta\,\overrightarrow{MQ} = 0.$$

EXERCICES

2. Soient P, Q deux points distincts de E et E′ la droite qu'ils déterminent.
   On désigne par $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{PQ}$.
   (i) Montrer que [P, Q] est l'intersection de la demi-droite d'origine P et de vecteur directeur $\vec{u}$ et de la demi-droite d'origine Q et de vecteur directeur $-\vec{u}$.
   (ii) Montrer que, si M est un point de E′, on a $M \in [P, Q] \iff 0 \leqslant \overline{PM} \leqslant 1$, où $\overline{PM}$ désigne la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{PM}$ par rapport à $\vec{u}$.
3. Définir les segments semi-ouverts]P, Q] e [P, Q[et le segment ouvert]P, Q[en termes de barycentres de demi-droites, de mesures algébriques.

2. Plans.

Définition.

Soit E un espace affine associé au K-espace vectoriel V. On appelle **plan** de E toute variété linéaire affine non vide ayant pour direction un plan vectoriel de V, autrement dit une variété linéaire affine de dimension 2.

Un plan E′ de E est donc parfaitement déterminé

- soit par la donnée de trois points non alignés M, N, P de E′; on le note alors (MNP);
- soit par la donnée d'un point M de E′ et de deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{u}$, $\vec{v}$ de V′, direction de E′; on le note alors $P(M, \vec{u}, \vec{v})$.

3. Hyperplans.

Définition.

Soit E un espace affine associé au K-espace vectoriel V. On appelle **hyperplan** de E toute variété linéaire affine non vide ayant pour direction un hyperplan vectoriel de V.

Autrement dit, si E est un espace affine de dimension n, les hyperplans de E sont les variétés linéaires affines de E de dimension $n - 1$.

En particulier :

- dans un espace affine E de dimension 3, les hyperplans sont les plans de E;
- dans un plan affine E, les hyperplans sont les droites de E;
- dans une droite affine E, les hyperplans sont les variétés réduites à un point.

c) Familles de variétés linéaires affines de E.

Si E est un espace affine, les variétés linéaires affines de E sont les éléments d'un ensemble $\mathcal{V}$ contenu dans $\mathcal{P}(E)$. Nous allons considérer des familles d'éléments de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire des familles de variétés linéaires affines de E.

Définition.

Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille de variétés linéaires affines de E, on appelle **intersection** de la famille l'ensemble $\{x \mid x \in E, \ \forall i \in I \ \ x \in E_i\}$.
Cet ensemble est noté $\bigcap_{i \in I} E_i$.

Considérons alors une famille $(E_i)_{i \in I}$ de variétés linéaires affines de E et supposons que l'intersection $\bigcap_{i \in I} E_i$ ne soit pas vide.

Notons V_i la direction de E_i et soit M un point de $\bigcap_{i \in I} E_i$. On a

$$\forall N \in E \qquad N \in \bigcap_{i \in I} E_i \iff \forall i \in I \ \ N \in E_i$$
$$\iff \forall i \in I \ \ \overrightarrow{MN} \in V_i$$
$$\iff \overrightarrow{MN} \in \bigcap_{i \in I} V_i,$$

ce qui montre que $\bigcap_{i \in I} E_i$ est une variété linéaire affine de E ayant pour direction le sous-espace vectoriel $\bigcap_{i \in I} V_i$ de V.

Nous avons donc démontré :

Théorème.

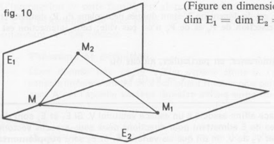
Soit E un espace affine associé à l'espace vectoriel V. Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille de variétés linéaires affines non vides, de directions $(V_i)_{i \in I}$, l'intersection $\bigcap_{i \in I} E_i$ est une variété linéaire affine de E qui, si elle n'est pas vide, a pour direction $\bigcap_{i \in I} V_i$.

Lorsque l'on s'intéresse à deux variétés linéaires affines non vides E_1, E_2 de E, on peut préciser dans quel cas l'intersection $E_1 \cap E_2$ est non vide :

Théorème.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel V. Étant données deux variétés linéaires affines non vides E_1 et E_2, de directions V_1, V_2, on a

$$(E_1 \cap E_2 \neq \varnothing) \iff (\forall M_1 \in E_1 \ \ \forall M_2 \in E_2 \ \ \overrightarrow{M_1M_2} \in V_1 + V_2).$$



(Figure en dimension 3 lorsque $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$)

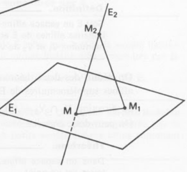


fig. 11

(Figure en dimension 3 lorsque $\dim E_1 = 2$, $\dim E_2 = 1$)

En effet, si l'intersection $E_1 \cap E_2$ est non vide, soit $M \in E_1 \cap E_2$ (fig. 10 et 11). On a alors

$$\forall M_1 \in E_1 \ \ \overrightarrow{MM_1} \in V_1 \ , \quad \text{et} \quad \forall M_2 \in E_2 \ \ \overrightarrow{MM_2} \in V_2 \ ,$$

donc

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{MM_2} - \overrightarrow{MM_1} \in V_2 + V_1.$$

Réciproquement, si

$$\overrightarrow{M_1M_2} \in V_1 + V_2 \ , \quad \text{où} \quad M_1 \in E_1 \quad \text{et} \quad M_2 \in E_2 \ ,$$

on peut écrire

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad \text{avec} \quad \vec{u}_1 \in V_1, \vec{u}_2 \in V_2;$$

alors, si M est le point de E_1 défini par $M = M_1 + \vec{u}_1$,

on a
$$\overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{M_1M} - \overrightarrow{M_1M_2}$$
$$= \vec{u}_1 - (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$$
$$= -\vec{u}_2.$$

Par suite $\overrightarrow{M_2M} \in V_2$ et $M \in E_2$, ce qui prouve que $M \in E_1 \cap E_2$ et donc que cette intersection n'est pas vide.

EXERCICE

4. Reprenant les notations de l'énoncé précédent, montrer que dans tous les cas l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$, lorsque M_1 décrit E_1 et que M_2 décrit E_2, est une variété linéaire affine de direction $V_1 + V_2$ de l'espace V muni de sa structure affine canonique.

   Retrouver ainsi le résultat du théorème précédent.

La condition $\overrightarrow{M_1M_2} \in V_1 + V_2$ est évidemment réalisée lorsque $V = V_1 + V_2$.

EXEMPLE

Lorsque E est de dimension 3, étant donnés deux plans P_1, P_2 distincts et non parallèles, l'intersection de P_1 et de P_2 n'est pas vide; cette intersection est une droite de E.

Nous allons nous intéresser, en particulier, au cas où

$$V = V_1 \oplus V_2.$$

Définition.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel V. Si E_1 et E_2 sont deux variétés linéaires affines de E admettant pour directions deux sous-espaces vectoriels supplémentaires V_1 et V_2 de V, on dit que les variétés E_1 et E_2 sont **supplémentaires.**

On déduit des deux théorèmes précédents que si E_1 et E_2 sont deux variétés linéaires affines supplémentaires de E, l'intersection $E_1 \cap E_2$ est une variété linéaire affine de E de direction $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$, donc un point de E.

On peut donc énoncer :

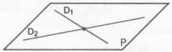
Théorème.

Dans un espace affine, l'intersection de deux variétés linéaires affines supplémentaires est un point.

EXEMPLES

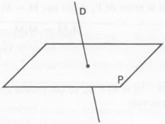
1. Dans un plan affine P, deux droites D_1, D_2 ayant des directions distinctes sont supplémentaires (fig. 12).

fig. 12



2. Dans un espace affine E de dimension 3, une droite D et un plan P tels que la direction de D ne soit pas contenue dans la direction de P sont des variétés supplémentaires (fig. 13).

fig. 13



d) Variété linéaire affine engendrée par une partie de E.

Soit A une partie de E. Les variétés linéaires affines de E contenant A constituent une partie $\mathcal{V}_A$ de $\mathcal{V}$, non vide puisque $E \in \mathcal{V}_A$. A cette partie $\mathcal{V}_A$ de $\mathcal{V}$ est canoniquement associée une famille d'éléments de $\mathcal{V}$ appelée *famille des variétés linéaires affines de* E *contenant* A.

L'intersection de cette famille est alors une variété linéaire affine de E, elle contient A et c'est évidemment la plus petite (au sens de l'inclusion) des variétés linéaires affines contenant A. On obtient :

Théorème et définition.

Étant donnée une partie A d'un espace affine E, l'intersection de la famille des variétés linéaires affines de E contenant A est la plus petite variété linéaire affine contenant A, on l'appelle **variété linéaire affine engendrée par** A.

EXERCICE

5. Montrer que si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, la variété linéaire affine engendrée par A est contenue dans la variété linéaire affine engendrée par B.

Application : *Variété linéaire affine engendrée par une famille d'éléments de* E.

Définition.

Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un espace affine E. On appelle **variété linéaire affine engendrée par cette famille,** la variété linéaire affine engendrée par la partie $\{M_i \mid i \in I\}$ de E, autrement dit la plus petite variété linéaire affine contenant tous les M_i.

On a :

Théorème.

La variété linéaire affine engendrée par la famille de points $(M_i)_{i \in I}$ est l'ensemble ayant pour éléments les barycentres des points M_i, i.e. l'ensemble

$$\left\{ \sum_{i \in I} \alpha^i M_i \;\middle|\; (\alpha^i)_{i \in I} \in K^{(I)}, \quad \sum_{i \in I} \alpha^i = 1 \right\}.$$

Notons E′ la variété linéaire affine engendrée par la famille $(M_i)_{i \in I}$ et E″ l'ensemble $\left\{ \sum_{i \in I} \alpha^i M_i \;\middle|\; (\alpha^i)_{i \in I} \in K^{(I)}, \sum_{i \in I} \alpha^i = 1 \right\}$. Comme E′ contient tout barycentre d'éléments de E′, E′ contient en particulier tous les barycentres des points M_i et donc $E'' \subset E'$. Montrons maintenant que E″ est une variété linéaire affine de E.

Soient $(P_j)_{j \in J}$ une famille de points de E″ et $(\beta^j)_{j \in J}$ une famille de $K^{(J)}$ telle que $\sum_{j \in J} \beta^j \neq 0$.

Pour simplifier, nous supposerons même que l'on a $\sum_{j \in J} \beta^j = 1$. Notons P le barycentre des P_j affectés des coefficients β^j.

Si $\quad \forall j \in J \quad P_j = \sum_{i \in I} \alpha_j^i M_i \quad$ où $\quad (\alpha_j^i)_{i \in I} \in K^{(I)} \quad$ et $\quad \sum_{i \in I} \alpha_j^i = 1$,

on a

$$\begin{aligned} P &= \sum_{j \in J} \beta^j P_j \\ &= \sum_{j \in J} \beta^j \Big(\sum_{i \in I} \alpha_j^i M_i \Big) \\ &= \sum_{i \in I} \Big(\sum_{j \in J} \beta^j \alpha_j^i \Big) M_i \end{aligned}$$

ce qui a bien un sens (prendre une origine quelconque pour le vérifier) car

$$\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J}\beta^j\alpha_j^i\Big)=\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I}\alpha_j^i\Big)\beta^j$$
$$=\sum_{j\in J}\beta^j$$
$$=1.$$

Par suite P est un barycentre des M_i, donc appartient à E″, et en conclusion E″ est une variété linéaire affine de E. Comme E″ contient les M_i, on en déduit $E'' \supset E'$, d'où finalement

$$E' = E''.$$

EXERCICES

6. Montrer que si M et N sont deux points distincts de E, la variété linéaire affine qu'ils engendrent est une droite. On la note (MN).
7. Montrer que si M, N, P sont trois points non alignés de E, la variété linéaire affine qu'ils engendrent est un plan. On le note (MNP).
8. Montrer que la variété linéaire affine E′ engendrée par la famille $(M_i)_{i\in I}$ a pour direction le sous-espace vectoriel de V engendré par la famille $(\overrightarrow{MM_i})_{i\in I}$, où M est un point quelconque de E′.

   En particulier M peut être un des points M_i. Si card I est fini en déduire une majoration de la dimension de E′.

e) **Parallélisme.**

Définition.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel V.
Si E_1 et E_2 sont deux variétés linéaires affines de E, de directions V_1 et V_2, on dit que
- E_1 **est parallèle à** E_2 lorsque $V_1 \subset V_2$.
- E_1 et E_2 **sont parallèles** lorsque $V_1 = V_2$.

EXERCICES

9. La relation « E_1 et E_2 sont parallèles » est une relation $\mathcal{R}$ d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{V}$ des variétés linéaires affines de E.
10. La relation « E_1 est parallèle à E_2 » est réflexive, transitive, non antisymétrique. Montrer qu'elle permet de définir sur $\mathcal{V}/\mathcal{R}$ une relation d'ordre. Quelle relation existe-t-il entre $\mathcal{V}/\mathcal{R}$ et l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V?

Le théorème suivant est une généralisation de l'axiome d'Euclide :

Théorème.

Dans un espace affine E, étant donnés une variété linéaire affine non vide E_1 et un point M de E, il existe une unique variété linéaire affine E_2 contenant M telle que E_1 et E_2 soient parallèles.

Si V_1 est la direction de E_1, la variété linéaire affine $E_2 = M + V_1$ ($i.e.$ $\{M+\vec{u} \mid \vec{u}\in V_1\}$) est manifestement l'unique variété linéaire affine de E répondant à la question.

3. 14 REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES ET ANALYTIQUES D'UNE VARIÉTÉ LINÉAIRE AFFINE

a) **Dans un plan affine P.**

On désigne par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de P, et si M est un point de P par (x, y) ses coordonnées cartésiennes.

1. **Représentation de la droite** $D(M_0, \vec{u})$.

Soient (x_0, y_0) les coordonnées cartésiennes de M_0, et (α, β) les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ (fig. 14).

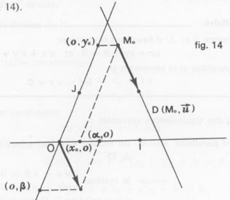


fig. 14

$(\overrightarrow{OI} = \vec{i}, OJ = \vec{j})$

On a $\quad M \in D(M_0, \vec{u}) \iff \exists\, \lambda \in K$ tel que $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{u}$,

on en déduit

$$\boxed{M \in D(M_0, \vec{u}) \iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{cases} \text{où } \lambda \in K}$$

Ces relations constituent une **représentation paramétrique** de la droite $D(M_0, \vec{u})$.

EXERCICE

1. Donner une représentation paramétrique de la parallèle à $D(M_0, \vec{u})$ contenant le point M_1 de coordonnées (x_1, y_1).

On peut traduire aussi la dépendance linéaire des vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{u}$ en écrivant $\det(\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$$

d'où, en développant, $\qquad \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$

on obtient finalement une relation de la forme $\quad \boxed{ux + vy + h = 0}$

où u et v ne sont pas simultanément nuls et qui est une **équation cartésienne** de la droite $D(M_0, \vec{u})$.

Théorème.

Un vecteur non nul $\vec{u}$ de coordonnées (α, β) est un vecteur directeur de la droite D d'équation $ux + vy + h = 0$ si et seulement si on a

$$u\alpha + v\beta = 0.$$

En effet, soit M un point de D, de coordonnées (x, y). Le vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D si et seulement si $M + \vec{u} \in D$, autrement dit si et seulement si $u(x + \alpha) + v(y + \alpha) + \lambda = 0$, ce qui tenu compte de la relation $ux + vy + h = 0$, équivaut à $u\alpha + v\beta = 0$.

Corollaire.

Les droites Δ et Δ' d'équations respectives

$$ux + vy + h = 0 \quad \text{et} \quad u'x + v'y + h' = 0$$

sont parallèles si et seulement si

$$uv' - u'v = 0.$$

Ceci résulte des équivalences suivantes :

D et D' sont parallèles $\Longleftrightarrow$ un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ de D est vecteur directeur de D'

$\Longleftrightarrow$ le système $\begin{cases} u\alpha + v\beta = 0 \\ u'\alpha + v'\beta = 0 \end{cases}$ a une solution (α,β) non nulle

$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = 0.$

Conséquence

Si D est la droite d'équation $ux + vy + h = 0$, la parallèle à D contenant le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0.$$

2. Représentation de la droite (M_1M_2).

Soient (x_1, y_1) les coordonnées de M_1 et (x_2, y_2) les coordonnées de M_2. On a

$M \in (M_1M_2) \Longleftrightarrow$ M est un barycentre de M_1 et M_2

$\Longleftrightarrow \exists\, (\alpha^1, \alpha^2) \in K^2$ tels que $\alpha^1 + \alpha^2 \neq 0$ et

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\alpha^1\,\overrightarrow{OM_1} + \alpha^2\,\overrightarrow{OM_2}}{\alpha^1 + \alpha^2}$$

d'où

$$M \in (M_1M_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2}{\alpha^1 + \alpha^2} \\[2ex] y = \dfrac{\alpha^1 y_1 + \alpha^2 y_2}{\alpha^1 + \alpha^2} \end{cases} \quad \begin{matrix} (\alpha^1, \alpha^2) \in K^2 \\ \alpha^1 + \alpha^2 \neq 0 \end{matrix}$$

REMARQUE

On obtient facilement une équation cartésienne de la droite (M_1M_2) en remarquant que $(M_1M_2) = D\,(M_1, \overrightarrow{M_1M_2})$.
Alors

$$M \in (M_1M_2) \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

et il n'y a qu'à développer le déterminant pour avoir une équation cartésienne de (M_1M_2).

3. Intersection de deux droites.

Soient D et D' deux droites de P.

1^er^ cas.

D a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{cases}$$

D' a pour équation cartésienne

$$u'x + v'y + h' = 0.$$

Nous avons alors à résoudre

$$u'(x_0 + \lambda\alpha) + v'(y_0 + \lambda\beta) + h' = 0$$

c'est-à-dire

$$(u'\alpha + v'\beta)\,\lambda + u'x_0 + v'y_0 + h' = 0.$$

si $u'\alpha + v'\beta = 0$ et $u'x_0 + v'y_0 + h' = 0$ on a $D = D'$
si $u'\alpha + v'\beta = 0$ et $u'x_0 + v'y_0 + h' \neq 0$ D et D' sont distinctes et parallèles.
si $u'\alpha + v'\beta \neq 0$ $\quad \lambda = -\dfrac{u'x_0 + v'y_0 + h'}{u'\alpha + v'\beta}$ est le paramètre du point d'intersection de D et D'.

2^e^ cas.

Δ a pour équation cartésienne $ux + vy + h = 0$.
Δ' a pour équation cartésienne $u'x + v'y + h' = 0$.
Dans ce cas nous avons à résoudre le système

$$\begin{cases} ux + vy + h = 0 \\ u'x + v'y + h' = 0 \end{cases}$$

- si $uv' - u'v \neq 0$ le système a une solution et une seule qui donne les coordonnées du point d'intersection de D et D';
- si $uv' - u'v = 0$ D et D' sont parallèles.

EXERCICE

2. Terminer la discussion ci-dessus en examinant dans quel cas D et D' sont confondues, et dans quel cas elles sont parallèles et distinctes.

b) Dans un espace affine E de dimension 3.

On désigne par $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de E, et si M est un point de E par (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes.

1. Représentation du plan $P(M_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées cartésiennes de M_0 et $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ (resp. $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$) les coordonnées de u_1 (resp. $\vec{u}_2$) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a

$$M \in P(M_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2) \iff \exists (\lambda, \mu) \in K^2 \text{ tels que } \overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2$$

on en déduit

$$\boxed{M \in P(M_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2) \iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \quad (\lambda,\mu) \in K^2 \\ z = z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{cases}}$$

Ces relations constituent une **représentation paramétrique** du plan $P(M_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

EXERCICE

3. Donner une représentation paramétrique du plan parallèle à $P(M_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ contenant le point M'_0 de coordonnées (x'_0, y'_0, z'_0).

On peut traduire aussi la dépendance linéaire des vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, en écrivant $\det(\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y - y_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ z - z_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant,

$$(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(x - x_0) + (\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2)(y - y_0) + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(z - z_0) = 0.$$

On obtient finalement une relation de la forme

$$\boxed{ux + vy + wz + h = 0}$$

où u, v, w ne sont pas simultanément nuls et qui est une **équation cartésienne** du plan $P(M_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

REMARQUE

On obtient cette équation, sans utiliser le déterminant, en éliminant λ et μ dans la représentation paramétrique du $P(M_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Théorème.

Un vecteur non nul $\vec{u}$ de coordonnées (α, β, γ) appartient à la direction du plan P d'équation $ux + vy + wz + h = 0$ si et seulement si

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

En effet, soit M un point de P, de coordonnées (x, y, z).

Le vecteur non nul $\vec{u}$ appartient à la direction de P si et seulement si $M + \vec{u} \in P$, autrement dit si et seulement si $u(x + \alpha) + v(y + \beta) + w(z + \gamma) + h = 0$, ce qui tenu compte de la relation $ux + vy + wz + h = 0$, équivaut à $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$.

2. Intersection de deux plans.

Soient P, P′ deux plans de E.

1er cas.

P a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y = y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{cases}$$

P′ a pour équation cartésienne

$$u'x + v'y + w'z + h' = 0.$$

Nous obtenons :

$$u'(x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2) + v'(y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2) + w'(z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2) + h' = 0$$

d'où

$$(u'\alpha_1 + v'\beta_1 + w'\gamma_1)\lambda + (u'\alpha_2 + v'\beta_2 + w'\gamma_2)\mu + u'x_0 + v'y_0 + w'z_0 + h' = 0.$$

• Si

$$u'\alpha_1 + v'\beta_1 + w'\gamma_1 = 0 \;,\; u'\alpha_2 + v'\beta_2 + w'\gamma_2 = 0 \;\text{ et }\; u'x_0 + v'y_0 + w'z_0 + \lambda' = 0,$$

on a P = P′.

• Si

$$u'\alpha_1 + v'\beta_1 + w'\gamma_1 = 0 \;,\; u'\alpha_2 + v'\beta_2 + w'\gamma_2 = 0 \;\text{ et }\; u'x_0 + v'y_0 + w'z_0 + \lambda' \neq 0,$$

P et P′ sont distincts et parallèles.

• Si $u'\alpha_1 + v'\beta_1 + w'\gamma_1 = 0$ et $u'\alpha_2 + v'\beta_2 + w'\gamma_2 \neq 0$,

P et P′ ont pour intersection une droite de vecteur directeur $\vec{u}_1$. On obtient une représentation paramétrique de cette droite en remplaçant, dans la représentation paramétrique de P, le paramètre μ par $-\dfrac{u'x_0 + v'y_0 + w'z_0 + h'}{u'\alpha_2 + v'\beta_2 + w'\gamma_2}$

• Si $u'\alpha_1 + v'\beta_1 + w'\gamma_1 \neq 0$ et $u'\alpha_2 + v'\beta_2 + w'\gamma_2 \neq 0$,

P et P′ ont pour intersection une droite. On obtient une représentation paramétrique de cette droite en remplaçant, dans la représentation paramétrique de P, μ par son expression en fonction de λ.

2e cas.

P a pour équation cartésienne $ux + vy + wz + h = 0$.

P′ a pour équation cartésienne $u'x + v'y + w'z + h' = 0$.

Nous obtenons le système

$$\begin{cases} ux + vy + wz + h = 0 \\ u'x + v'y + w'z + h' = 0 \end{cases}$$

Si les trois déterminants $\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} u & w \\ u' & w' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}$, sont nuls P et P′ sont parallèles. Sinon le système représente une droite de E. (Établir ces résultats à titre d'exercice.)

3. Représentation du plan $(M_1M_2M_3)$.

Soient (x_i, y_i, z_i) les coordonnées cartésiennes de M_i, $i \in \{1, 2, 3\}$. On a

$$M \in (M_1M_2M_3) \iff M \text{ est barycentre de } M_1, M_2, M_3.$$

$$\iff \exists\, (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \in K^3 \text{ tels que } \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 \neq 0$$

$$\text{et } \quad \overrightarrow{OM} = \frac{\alpha^1\,\overrightarrow{OM_1} + \alpha^2\,\overrightarrow{OM_2} + \alpha^3\,\overrightarrow{OM_3}}{\alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3},$$

d'où

$$M \in (M_1M_2M_3) \iff \begin{cases} x = \dfrac{\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3}{\alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3} \\[2mm] y = \dfrac{\alpha^1 y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha^3 y_3}{\alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3} \\[2mm] z = \dfrac{\alpha^1 z_1 + \alpha^2 z_2 + \alpha^3 z_3}{\alpha^3 + \alpha_1 + \alpha_2} \end{cases} \qquad (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \in K^3, \quad \alpha^1 + \alpha^2 + \alpha^3 \neq 0$$

REMARQUE

On obtient facilement l'équation cartésienne du plan $(M_1M_2M_3)$ en remarquant que $(M_1M_2M_3) = P(M_1, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$.

Alors

$$M \in (M_1M_2M_3) \iff \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

et il n'y a qu'à développer le déterminant pour avoir une équation cartésienne de $(M_1M_2M_3)$.

4. Représentation de la droite $D(M_0, \vec{u})$.

Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées cartésiennes de M_0, et (α, β, γ) les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a

$$M \in D(M_0, \vec{u}) \iff \exists\, \lambda \in K \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{M_0M} = \lambda\,\vec{u},$$

on en déduit

$$M \in D(M_0, \vec{u}) \iff \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ z = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases} \quad \text{où } \lambda \in K$$

Ces relations constituent une **représentation paramétrique** de la droite $D(M_0, \vec{u})$.

EXERCICE

4. Donner une représentation paramétrique de la droite parallèle à $D(M_0, \vec{u})$ contenant le point M_1 de coordonnées (x_1, y_1, z_1).

Les relations précédentes conduisent à :

$$M \in D(M_0, \vec{u}) \iff \begin{cases} \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \\ \gamma(x - x_0) - \alpha(z - z_0) = 0 \\ \gamma(y - y_0) - \beta(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

chacune de ces trois équations représentant un plan de E contenant $D(M_0, \vec{u})$.

Évidemment deux de ces équations suffisent à déterminer $D(M_0, \vec{u})$.

5. Représentation de la droite (M_1M_2).

Soient (x_1, y_1, z_1) les coordonnées cartésiennes de M_1 et (x_2, y_2, z_2) celles de M_2.

On a

$$M \in (M_1M_2) \iff M \text{ est un barycentre de } M_1 \text{ et } M_2.$$

$$\iff \exists\, (\alpha^1, \alpha^2) \in K^2 \quad \text{tels que} \quad \alpha^1 + \alpha^2 \neq 0$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{OM} = \frac{\alpha^1\,\overrightarrow{OM_1} + \alpha^2\,\overrightarrow{OM_2}}{\alpha^1 + \alpha^2}$$

d'où

$$M \in (M_1M_2) \iff \begin{cases} x = \dfrac{\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2}{\alpha^1 + \alpha^2} \\[2mm] y = \dfrac{\alpha^1 y_1 + \alpha^2 y_2}{\alpha^1 + \alpha^2} \\[2mm] z = \dfrac{\alpha^1 z_1 + \alpha^2 z_2}{\alpha^1 + \alpha^2} \end{cases} \qquad (\alpha^1, \alpha^2) \in K^2, \quad \alpha^1 + \alpha^2 \neq 0$$

6. Intersection d'une droite et d'un plan.

Soient D une droite et P un plan de E.

1er cas.

D a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$

P a pour équation cartésienne $\quad ux + vy + wz + h = 0.$

Nous avons à résoudre

$$u(x_0 + \lambda\alpha) + v(y_0 + \lambda\beta) + w(z_0 + \lambda\gamma) + h = 0$$

c'est-à-dire

$$(u\alpha + v\beta + w\gamma)\,\lambda + ux_0 + vy_0 + wz_0 + h = 0.$$

• Si $\quad u\alpha + v\beta + w\gamma = 0 \quad \text{et} \quad ux_0 + vy_0 + wz_0 + h = 0$

la droite D est contenue dans P.

• Si $\quad u\alpha + v\beta + w\gamma = 0 \quad \text{et} \quad ux_0 + vy_0 + wz_0 + h = 0$,

la droite D est parallèle à P, mais non contenue dans P.

• Si $\quad u\alpha + v\beta + w\gamma \neq 0$,

D et P ont pour intersection un point. On obtient les coordonnées de ce point en remplaçant le paramètre λ, dans la représentation paramétrique de D, par

$$-\frac{ux_0 + vy_0 + xz_0 + h}{u\alpha + v\beta + w\gamma}$$

2e cas.

D est représentée, comme intersection de deux plans, par le système

$$\begin{cases} u_1 x + v_1 y + w_1 z + h_1 = 0 \\ u_2 x + v_2 y + w_2 z + h_2 = 0 \end{cases}$$

P a pour équation cartésienne $ux + vy + wz + h = 0$.
Nous avons alors à résoudre le système

$$\begin{cases} ux + vy + wz + h = 0 \\ u_1 x + v_1 y + w_1 z + h_1 = 0 \\ u_2 x + v_2 y + w_2 z + h_2 = 0 \end{cases}$$

• Si le déterminant $\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}$ est nul,

la droite D est parallèle au plan P (éventuellement elle peut être contenue dans P).

• Sinon le système a une solution et une seule qui donne les coordonnées du point d'intersection de P et D.

REMARQUES

1. Si l'on a besoin de déterminer un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ de D, il suffit de chercher une solution non nulle au système

$$\begin{cases} u_1 \alpha + v_1 \beta + w_1 \gamma = 0 \\ u_2 \alpha + v_2 \beta + w_2 \gamma = 0. \end{cases}$$

2. Si l'on veut déterminer la droite D′ parallèle à D contenant le point $M'(x', y', z')$, comme $D = P_1 \cap P_2$ où P_i est le plan d'équation $u_i x + v_i y + w_i y + h_i = 0$ $(i \in \{1, 2\})$, on a $D' = P'_1 \cap P'_2$,
P'_i étant le plan parallèle à P_i contenant M′.
Par suite D′ est représentée par le système

$$\begin{cases} u_1 (x - x') + v_1 (y - y') + w_1 (z - z') = 0 \\ u_2 (x - x') + v_2 (y - y') + w_2 (z - z') = 0. \end{cases}$$

IV. Étude des applications affines

3. 15 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Les applications affines ont été définies dans la section II, paragraphe 10, où on a aussi donné des exemples.

Théorème.

Soient E, E′ deux espaces affines associés respectivement aux K-espaces vectoriels V, V′. Une application affine f de E dans E′ est déterminée par la donnée du transformé d'un point de E et de l'application linéaire associée.

Nous devons vérifier que si l'on se donne deux points M et M′ de E et E′ et une application linéaire l de V dans V′, il existe une unique application affine f de E dans E′ telle que $f(M) = M'$ et telle que l soit l'application linéaire associée à f.
Si une application affine f répond à la question on a

$$\forall N \in E \quad f(N) = f(M) + l(\overrightarrow{MN}) = M' + l(\overrightarrow{MN})$$

ce qui prouve l'unicité de f.
Montrons maintenant que l'application f de E dans E′ définie par

$$\forall N \in E \quad f(N) = M' + l(\overrightarrow{MN})$$

est affine et admet l pour application linéaire associée. Si N et P sont deux points de E, on a

$$f(N) = M' + l(\overrightarrow{MN})$$

et

$$f(P) = M' + l(\overrightarrow{MP})$$

d'où

$$f(N) - f(P) = l(\overrightarrow{MN}) - l(\overrightarrow{MP}) = l(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP}) = l(\overrightarrow{PN})$$

ce qui, N et P étant arbitraires, prouve notre assertion.
On peut aussi énoncer ce résultat en disant qu'une application f de E dans E′, qui à un point M de E associe le point M′ de E′, est affine si et seulement si l'application

$$(E, M) \longrightarrow (E', M'), \quad N \longmapsto f(N)$$

est une application linéaire.
En particulier, la donnée d'une application affine f de E dans lui-même ayant au moins un point invariant M équivaut à la donnée d'un endomorphisme f_M de l'espace vectoriel (E, M).

EXERCICE

1. Montrer que la donnée d'un point M de E permet d'établir une bijection de l'ensemble des applications affines de E dans E′ sur le produit cartésien $E' \times \mathfrak{L}(V, V')$.

Le résultat précédent est très important car il permet de trouver toutes les applications affines de E dans E′.

EXERCICES

2. Montrer que si E′ = E l'ensemble des points invariants de
$$f \text{ (i.e. } \{M \mid M \in E, f(M) = M\})$$
est une variété linéaire affine de E qui, si elle n'est pas vide, admet pour direction le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de l.

3. Montrer que le graphe d'une application affine de E dans E′ est une variété linéaire affine de $E \times E'$.
Réciproquement, montrer que toute variété linéaire affine F de $E \times E'$ telle que la restriction à F de la projection p de $E \times E'$ sur E soit une bijection, est le graphe d'une application affine de E dans E′.
Cas particulier : $E \times E'$ est de dimension 2 ou 3; faire des figures.

Composition des applications affines

Théorème.

Soient E, E′, E″ des espaces affines associés respectivement aux K-espaces vectoriels V, V′, V″.
Si f est une application affine de E dans E′ et g une application affine de E′ dans E″, l'application composée $g \circ f$ est une application affine de E dans E″.
De plus, l'application linéaire associée à $g \circ f$ est la composée des applications linéaires associées à g et à f.

En effet, soit l (resp. h) l'application linéaire associée à f (resp. g).
On a

$$\forall (M, N) \in E^2 \quad g \circ f(N) - g \circ f(M) = g[f(N)] - g[f(M)] = h[f(N) - f(M)] = h[l(N - M)] = h \circ l(N - M)$$

ce qui montre que $g \circ f$ est affine et a pour application linéaire associée $h \circ l$.

Le théorème suivant va montrer l'importance, dans le comportement d'une application affine, des propriétés de l'application linéaire associée.

Théorème.

Soient E et E′ deux espaces affines associés respectivement aux K-espaces vectoriels V et V′. Si f est une application affine de E dans E′ et l l'application linéaire associée, on a :

(i) f est injective si et seulement si l est injective.

(ii) f est surjective si et seulement si l est surjective.

(i) Supposons l injective.

Si, pour deux points M et N de E, on a $f(M) = f(N)$, on en déduit $l(\overrightarrow{MN}) = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$.

Par conséquent M = N et f est injective.

Si l n'est pas injective, il existe un vecteur non nul $\vec{u}$ de V tel que $l(\vec{u}) = \vec{0}$.

Alors, si M ∈ E, le point $N = M + \vec{u}$ est distinct de M, et l'on a

$$f(N) = f(M) + l(\vec{u}) = f(M),$$

ce qui prouve que f n'est pas injective.

(ii) Supposons f surjective.

Soit $\vec{u}' \in V'$; si M ∈ E, $f(M) + \vec{u} \in E'$ et il existe un point P de E tel que

$$f(M) + \vec{u}' = f(P).$$

On obtient alors $\vec{u}' = l(\overrightarrow{MP})$, ce qui montre que l est surjective.
Réciproquement, si l est surjective, soit P′ ∈ E′.

Si M ∈ E, $P' - f(M) \in V'$ et il existe donc $\vec{u} \in V$ tel que $l(\vec{u}) = P' - f(M)$. Alors, si on note P le point $M + \vec{u}$, on a $f(P) = f(M) + l(\vec{u})$; donc $f(P) = P'$ et f est bien surjective.

3. 16 ISOMORPHISMES D'ESPACES AFFINES

Définition.

Soient E, E′ deux espaces affines et f une application affine de E dans E′. On dit que f est **un isomorphisme d'espaces affines** s'il existe une application affine g de E′ dans E telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{E'}.$$

Nous allons montrer qu'une application affine est un isomorphisme d'espaces affines si et seulement si l'application linéaire associée est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème.

Soient E, E′ deux espaces affines associés aux K-espaces vectoriels V, V′. Si f est une application affine de E dans E′ et l l'application linéaire de V dans V′, associée, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme d'espaces affines ;

(ii) f est bijective ;

(iii) l est bijective (donc un isomorphisme de V sur V′).

Nous allons montrer la suite d'implications

$$(i) \Longrightarrow (ii), \quad (ii) \Longrightarrow (iii), \quad (iii) \Longrightarrow (i).$$

(i) ⟹ (ii).

L'existence d'une application g de E′ dans E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{E'}$ prouve que f est bijective.

(ii) ⟹ (iii).

C'est une conséquence du dernier théorème du paragraphe 15.

(iii) ⟹ (i).

Soit M un point de E et $M' = f(M)$ son image.

Considérons l'application affine g de E′ dans E définie par

$$\forall P' \in E' \quad g(P') = M + l^{-1}(\overrightarrow{M'P'}).$$

On a

$$\forall P \in E \quad g(f(P)) = P + l^{-1}(f(P) - f(M)) = M + \overrightarrow{MP} = P$$

d'où

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

De même

$$\forall P' \in E' \quad f(g(P')) = f(M) + l[g(P') - M] = f(M) + l[l^{-1}(\overrightarrow{M'P'})] = M' + \overrightarrow{M'P'} = P'$$

d'où

$$f \circ g = \mathrm{Id}_{E'}.$$

REMARQUE

Si E et E′ ont même dimension finie n, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l est injective
(ii) l est surjective
(iii) f est injective
(iv) f est surjective
(v) f est un isomorphisme d'espaces affines.

En effet, V et V′ ayant alors même dimension n, l'application linéaire l est bijective si et seulement si elle est injective (resp. surjective).

Il résulte aussi de ce théorème que deux espaces affines de dimensions finies ne peuvent être isomorphes que si leurs dimensions sont égales.

EXERCICES

1. Montrer, réciproquement, qui si E et E′ sont deux espaces affines de dimension n, il existe au moins un isomorphisme de E sur E′.
2. Soient E, E′, E″ trois espaces affines. Montrer que si f est un isomorphisme de E sur E′, et g un isomorphisme de E′ sur E″, l'application composée $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur E″.

Il résulte de l'exercice 2, qu'étant donné un espace affine E, l'ensemble des isomorphismes de E sur lui-même a, pour la composition des applications, une structure de groupe. Ce groupe est appelé **groupe linéaire** affine de E et est noté GLA (E).

EXERCICE

3. Soit E un espace affine associé à l'espace vectoriel V. Si f est une application affine de E dans lui-même, on note L (f) l'application linéaire associée. Montrer que l'application de GLA (E) dans GL (V) qui à f associe L (f) est un homomorphisme surjectif de groupes. Peut-il être injectif?

3. 17 PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES APPLICATIONS AFFINES

Théorème.

Soient E, E′ deux espaces associés aux K-espaces vectoriels V, V′. Une application f de E dans E′ est affine si et seulement si, pour toute famille $(M_i)_{i \in I}$ de points de E et pour toute famille $(\alpha^i)_{i \in I}$ de $K^{(I)}$ telle que $\sum_{i \in I} \alpha^i \neq 0$, l'image par f du barycentre des points M_i affectés des coefficients α^i est le barycentre des points $f(M_i)$ affectés de ces mêmes coefficients α^i.

On peut formuler ce résultat de la manière suivante :

$$f \text{ affine} \iff \begin{cases} \forall\, (M_i)_{i \in I} \in E^I \\ \forall\, (\alpha^i)_{i \in I} \in K^{(I)} \quad \text{telle que} \quad \sum_{i \in I} \alpha^i = 1 \\ f\left(\sum_{i \in I} \alpha^i M_i\right) = \sum_{i \in I} \alpha^i f(M_i) \end{cases}$$

On exprime souvent ce résultat en disant, plus brièvement que les applications affines sont caractérisées par le fait qu'elles *conservent le barycentre.*

Supposons d'abord f affine et notons l l'application linéaire associée.

On désigne par M le barycentre des points M_i affectés des coefficients α^i, par M′ le point $f(M)$ et $\forall\, i \in I$ par M'_i le point $f(M_i)$.
De l'égalité

$$\sum_{i \in I} \alpha^i\, \overrightarrow{MM_i} = \vec{0}$$

on déduit

$$\sum_{i \in I} \alpha^i\, l(\overrightarrow{MM_i}) = \vec{0}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i \in I} \alpha^i\, \overrightarrow{M'M'_i} = \vec{0}$$

ce qui prouve que M′ est le barycentre des points M'_i affectés des coefficients α^i.
Réciproquement, si f est une application de E dans E′ conservant le barycentre, notons l l'application de V dans V′ définie par

$$\forall\, \vec{u} \in V \qquad l(\vec{u}) = f(M + \vec{u}) - f(M)$$

où M est un point fixé de E.
Nous allons vérifier que l est une application linéaire, ce qui prouvera que f est affine.

• Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux éléments de V. Le point $M + \vec{u} + \vec{v}$ est le barycentre des points M, $M + \vec{u}$, $M + \vec{v}$ affectés des coefficients $-1, 1, 1$. Alors $f(M + \vec{u} + \vec{v})$ est le barycentre des points $f(M)$, $f(M + \vec{u})$, $f(M + \vec{v})$ affectés des coefficients $-1, 1, 1$, ce qui donne

$$f(M + \vec{u} + \vec{v}) - f(M) = -\left[f(M) - f(M)\right] + \left[f(M + \vec{u}) - f(M)\right] + \left[f(M + \vec{v}) - f(M)\right]$$

d'où

$$l(\vec{u} + \vec{v}) = l(\vec{u}) + l(\vec{v}).$$

• Soient $\vec{u} \in V$ et $\alpha \in K$.
Le point $M + \alpha\vec{u}$ est le barycentre des points M et $M + \vec{u}$ affectés des coefficients $1 - \alpha$ et α. Par suite $f(M + \alpha\vec{u})$ est le barycentre des points $f(M)$ et $f(M + \vec{u})$ affectés des coefficients $1 - \alpha$ et α, d'où

$$f(M + \alpha\vec{u}) - f(M) = (1 - \alpha)\left[f(M) - f(M)\right] + \alpha\left[f(M + \vec{u}) - f(M)\right]$$

c'est-à-dire

$$l(\alpha\vec{u}) = \alpha\, l(\vec{u}).$$

EXERCICE

Lorsque K = ℚ, ℝ ou ℂ, montrer qu'une application f de E dans E′ est affine si et seulement si elle conserve le barycentre de deux points, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall\, (M_1, M_2) \in E^2 \quad \forall\, (\alpha^1, \alpha^2) \in K^2 \qquad \text{avec} \qquad \alpha^1 + \alpha^2 \neq 0$$

l'image par f du barycentre de M_1 et M_2 affectés des coefficients α^1 et α^2 est le barycentre de $f(M_1)$ et $f(M_2)$ affectés de ces mêmes coefficients.
(On pourra s'inspirer de la démonstration du premier théorème de III, § 13 a.)

3.18 DÉTERMINATION D'UNE APPLICATION AFFINE

a) Dans un repère affine.

Théorème.

Soient E, E′ deux espaces affines associés aux K-espaces vectoriels V, V′, et $(M_i)_{i\in I}$ un repère affine de E. Étant donnée une famille $(M'_i)_{i\in I}$ de points de E′ il existe une application affine et une seule f de E dans E′ telle que

$$\forall i \in I \quad M'_i = f(M_i).$$

En effet, soit M un point de E et $(\alpha^i)_{i\in I}$ la famille de ses coordonnées barycentriques dans le repère $(M_i)_{i\in I}$ $\left(\text{i.e. } (\alpha^i)_{i\in I} \in K^{(I)}, \sum_{i\in I} \alpha^i = 1 \text{ et } M = \sum_{i\in I} \alpha^i M_i\right)$; si une application affine f répond à la question, on doit avoir $f(M) = \sum_{i\in I} \alpha^i f(M_i)$ puisque f conserve le barycentre, c'est-à-dire $f(M) = \sum_{i\in I} \alpha^i M'_i$.

Une telle application f est donc unique.

Nous allons montrer maintenant que l'application f, qui au point M de coordonnées barycentriques $(\alpha^i)_{i\in I}$ dans le repère $(M_i)_{i\in I}$ associe le barycentre $\sum_{i\in I} \alpha^i M'_i$ des points M'_i affectés des coefficients α^i, est affine. Soit l l'application de V dans V′ définie par

$$\forall \vec{u} \in V \qquad l(\vec{u}) = f(M + \vec{u}) - f(M)$$

où M est un point fixé de E.

On sait que l'on peut associer à $\vec{u}$ une unique famille $(\lambda^i)_{i\in I}$ de $K^{(I)}$ telle que

$$\sum_{i\in I} \lambda^i = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} = \sum_{i\in I} \lambda^i M_i \; ;$$

il résulte de la définition de f que l'on a

$$l(\vec{u}) = \sum_{i\in I} \lambda^i M'_i$$

et l est manifestement linéaire.

EXERCICE

1. Donner une autre démonstration de la réciproque de ce théorème en montrant que l'application f définie par $f\left(\sum_{i\in I} \alpha^i M_i\right) = \sum_{i\in I} \alpha^i M'_i$ conserve le barycentre.

On pourra utiliser l'exercice 2 du § 3.12 a.

REMARQUE

Ce théorème nous donne un moyen pratique d'obtenir toutes les applications affines. En particulier

- lorsque E est une droite affine, un repère affine de E est constitué de 2 points M_1, M_2 distincts et étant donnés 2 points M'_1, M'_2 de E′ il existe une unique application affine f de E dans E′ telle que $f(M_1) = M'_1$, $f(M_2) = M'_2$;

- lorsque E est un plan affine, un repère affine de E est constitué de 3 points M_1, M_2, M_3 non alignés, et étant donnés 3 points M'_1, M'_2, M'_3 de E′ il existe une unique application affine f de E dans E′ telle que $f(M_1) = M'_1$, $f(M_2) = M'_2$, $f(M_3) = M'_3$;
- lorsque E est un espace affine de dimension 3, un repère affine de E est constitué de 4 points M_1, M_2, M_3, M_4 non coplanaires, et étant donnés 4 points M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 de E′ il existe une unique application affine f de E dans E′ telle que $f(M_1) = M'_1$, $f(M_2) = M'_2$, $f(M_3) = M'_3$, $f(M_4) = M'_4$.

EXERCICE

2. Montrer que si E est un espace affine de dimension n la donnée d'un repère affine de E permet d'établir une bijection de l'ensemble des applications affines de E dans E′ sur E'^{n+1}.

b) Dans un repère cartésien.

Théorème.

Soient E, E′ deux espaces affines associés aux K-espaces vectoriels V, V′ et $\left(O, (\vec{e_i})_{i\in I}\right)$ un repère cartésien de E. Étant donnés un point O′ de E′ et une famille $(\vec{e'_i})_{i\in I}$ de vecteurs de V′ il existe une application affine et une seule f de E dans E′ telle que

(i) $f(O) = O'$

(ii) si l est l'application linéaire associée à f,

$$\forall i \in I \qquad l(\vec{e_i}) = \vec{e'_i}.$$

Nous savons en effet qu'une application affine est totalement déterminée par la donnée du transformé d'un point et de l'application linéaire associée.

Or une application linéaire l de V dans V′ est, nous l'avons vu, déterminée de manière unique par la donnée des vecteurs $l(\vec{e_i})$ de V′.

Représentation matricielle d'une application affine

Nous supposons maintenant que E et E′ sont de dimensions finies n et p. Donnons-nous un repère cartésien $(O, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ de E et un repère cartésien $(O', \vec{e'_1}, \ldots, \vec{e'_p})$ de E′; si f est une application affine de E dans E′ soit A la matrice de l'application linéaire l associée à f, dans les bases $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ et $(\vec{e'_1}, \ldots, \vec{e'_p})$ de V et V′.

Alors si M est un point de E, en désignant par X la matrice colonne de ses coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ et par Y la matrice colonne des coordonnées cartésiennes de $f(M)$ dans le repère $(O', \vec{e'_1}, \ldots, \vec{e'_p})$, la relation

$$f(M) = f(O) + l(\overrightarrow{OM})$$

conduit à

$$\boxed{Y = Y_0 + AX}$$

où Y_0 est la matrice colonne des coordonnées cartésiennes de $f(O)$ dans le repère $(O', \vec{e'_1}, \ldots, \vec{e'_p})$.

EXEMPLES

1. $n = 2$, $p = 3$, $K = \mathbb{R}$.

   f est définie par :

   - $f(O)$ est le point de coordonnées $(1, 2, -1)$ dans $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$
   - $l(\vec{e}_1) = \vec{e}'_1 - \vec{e}'_3$

     $l(\vec{e}_2) = \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3$ (fig. 15).

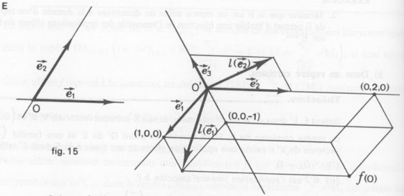


fig. 15

Soient (x^1, x^2) les coordonnées de M et (x'^1, x'^2, x'^3) les coordonnées de $f(M)$. On a

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} x'_1 = 1 + x^1 \\ x'_2 = 2 + x^2 \\ x'_3 = -1 - x^1 + x^2. \end{cases}$$

2. $E = E'$, $n = 2$, $K = \mathbb{R}$.

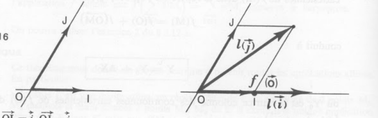
   Reprenons les notations classiques suivantes :

   $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ désigne un repère cartésien de E, (x, y) les coordonnées d'un point M de E et (x', y') les coordonnées de $f(M)$, f étant l'application affine de E dans lui-même définie par :

   - $f(O)$ a pour coordonnées $(1, 0)$
   - $l(\vec{i}) = 2\vec{i}$

     $l(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$ (fig. 16).

fig. 16



On a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} x' = 1 + 2x + y \\ y' = y \end{cases}$$

EXERCICES

On adoptera les notations suivantes :

E est un espace affine de dimension 3 associé à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère affine de E, f une application affine de E dans lui-même admettant l pour application linéaire associée.
Si M est un point de E, on désigne par (x, y, z) ses coordonnées dans le repère $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et par (x', y', z') les coordonnées de $f(M)$ dans ce même repère.

3. Déterminer x', y', z' en fonction de x, y, z lorsque
   - $f(O)$ a pour coordonnées $2, 1, -1$.
   - $l(\vec{i}) = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

     $l(\vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{k}$

     $l(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

   Montrer que f appartient à GLA (E).

4. Déterminer x', y', z' en fonction de x, y, z lorsque
   - $f(O)$ a pour coordonnées $1, 3, 0$.
   - $l(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

     $l(\vec{j}) = \vec{j} - \vec{k}$

     $l(\vec{k}) = \vec{i} + 3\vec{k}$.

   Montrer que f n'est pas surjective et que $f(E)$ est le plan d'équation

   $$3x' - y' - z' = 0.$$

3.19 PROPRIÉTÉS CONSERVÉES PAR UNE APPLICATION AFFINE

a) Image et image réciproque d'une variété linéaire affine.

Théorème.

Soient E, E' deux espaces affines associés aux K-espaces vectoriels V, V'. Si f est une application affine de E dans E' et l l'application linéaire associée, on a

(i) l'image par f d'une variété linéaire affine de E de direction D est une variété linéaire affine de E' de direction $l(D)$;

(ii) l'image réciproque d'une variété linéaire affine de E' de direction D' est une variété linéaire affine de E qui si elle n'est pas vide a pour direction $l^{-1}(D')$.

(i) Si F est une variété linéaire affine de E de direction D et M un point de F, on a

$$F = M + D = \{M + \vec{u} \mid \vec{u} \in D\}$$

d'où

$$f(F) = \{f(M + \vec{u}) \mid \vec{u} \in D\} = \{f(M) + l(\vec{u}) \mid \vec{u} \in D\}$$
$$= f(M) + l(D)$$

(ii) Soit F' une variété linéaire affine de E', de direction D'. Si $F = f^{-1}(F')$ n'est pas vide, soit $M \in F$.

On a

$$F' = \{f(M) + \vec{u}' \mid \vec{u}' \in D'\}$$

d'où

$$\forall N \in E \qquad N \in F \iff f(N) \in F'$$
$$\iff f(N) - f(M) \in D'$$
$$\iff l(\overrightarrow{MN}) \in D'$$
$$\iff \overrightarrow{MN} \in l^{-1}(D')$$

et par suite $F = M + l^{-1}(D')$.

b) **Conséquences.**

Soient E, E′ deux espaces affines et f une application affine de E dans E′.
Il résulte du théorème de *a)* que si F est une variété linéaire affine de E de dimension n, son image $f(F)$ est une variété linéaire affine de dimension

$$n - p \quad \text{où} \quad p = \dim (D \cap \operatorname{Ker} l) \quad ,$$

puisque

$$\dim l(D) = \dim D - \dim (D \cap \operatorname{Ker} l).$$

En particulier on a :
l'image d'une droite de E est une droite ou un point de E′. On exprime ceci en disant que l'application f *conserve l'alignement*.

Théorème.

Soient E, E′ deux espaces affines associés à des espaces vectoriels V, V′ sur ℝ. Toute application f de E dans E′ qui conserve l'alignement est affine.

La démonstration de ce résultat, qui n'est pas au programme de Terminale, fait l'objet d'un sujet d'étude.
C'est une propriété caractéristique très intéressante des applications affines.
Supposons maintenant que F_1 et F_2 soient deux variétés linéaires affines de E de directions V_1, V_2; alors :

- si F_1 est parallèle à F_2, $f(F_1)$ est parallèle à $f(F_2)$ puisque $V_1 \subset V_2$ implique $l(V_1) \subset l(V_2)$;
- si F_1 et F_2 sont parallèles, $f(F_1)$ et $f(F_2)$ sont parallèles.

On peut donc conclure qu'une application affine *conserve le parallélisme*.

c) **Problème résolu.**

Soient E un espace affine de dimension 3 associé à un espace vectoriel V sur ℝ et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de E.
Si M est un point de E on notera (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Énoncé du problème.

On désigne par f l'application de E dans lui-même qui au point M de coordonnées (x, y, z) associe le point $f(M)$ de coordonnées (x', y', z') telles que

$$\begin{aligned} x' &= 1 + x + 2y + z \\ y' &= 2 + y - z \\ z' &= -1 + x + 3z \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une application affine. Que peut-on dire de l'application linéaire l associée.
2. Déterminer Ker l et l'image de f.
3. On considère la droite D de E ayant pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

déterminer $f(D)$.

4. Quelle est l'image du plan P d'équation

$$2x + y - z + 1 = 0.$$

5. Quelle est l'image du plan P′ d'équation

$$x + y + 2z - 1 = 0.$$

Expliquer le résultat.

Solution du problème.

1. On a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ou

$$f(M) = f(O) + l(\overrightarrow{OM})$$

l étant l'application linéaire de V dans lui-même ayant pour matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc f est affine.
On a $\det l = \det A = 0$, donc l n'est pas injective (ni surjective) et il en est de même de f.

2. Un vecteur $\vec{u}$ de V de coordonnées (α, β, γ) appartient à Ker l si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 0$$
$$\beta - \gamma = 0$$

(2 équations suffisent car la 3[e] est une combinaison linéaire des 2 premières.)
On en déduit $\beta = \gamma$ et $\alpha = -3\beta$, ce qui montre que Ker l est une droite vectorielle de V, celle engendrée par le vecteur $\vec{u}\,(-3, 1, 1)$.
Il en résulte que l'image de f est de dimension $3 - 1$, c'est-à-dire est un plan de E.
Si l'on remarque que l'on a entre x', y', z' la relation $x' - 2y' - z' + 2 = 0$ on obtient immédiatement l'équation cartésienne du plan $f(E)$, à savoir

$$x - 2y - z + 2 = 0.$$

Sinon on peut procéder, par exemple, de la manière suivante :

$$l(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{k} \quad \text{et} \quad l(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j}$$

sont linéairement indépendants et alors

$$f(E) = P\big(f(O) \quad , \quad l(\vec{i}) \quad , \quad l(\vec{j})\big)$$

On en déduit une équation cartésienne de $f(E)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

soit après développement $\quad -x + 2y + z - 2 = 0$
qui est au signe près l'expression que l'on avait obtenue.

3. La droite D envisagée contient le point M_0 de coordonnées $(1, 2, -1)$ et a pour vecteur directeur

$$\vec{u}_0\ (1, -1, 1).$$

Comme $\vec{u}_0 \notin \operatorname{Ker} l$, $f(D)$ est une droite de E. On a

$$\begin{aligned} x' &= 1 + (1+\lambda) + 2(2-\lambda) + (-1+\lambda) = 5 \\ y' &= 2 + (2-\lambda) - (-1+\lambda) = 5 - 2\lambda \\ z' &= -1 + (1+\lambda) + 3(-1+\lambda) = -3 + 4\lambda \end{aligned}$$

d'où une représentation paramétrique de $f(D)$:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = -3 + 4\lambda \end{cases}$$

4. Le plan P contient le point N $(0, 0, 1)$; si $\vec{v}\ (\alpha, \beta, \gamma)$ appartient à la direction de P on a

$$2\alpha + \beta - \gamma \neq 0.$$

Les vecteurs $\vec{v}_1\ (1, 0, 2)$ et $\vec{v}_2\ (0, 1, 1)$ répondent à la question et sont linéairement indépendants.
Donc $P = P(N, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$.
D'autre part
- $f(N)$ a pour coordonnées $(2, 1, 2)$;
- $l(\vec{v}_1)$ a pour coordonnées $(3, -2, 7)$;
- $l(\vec{v}_2)$ a pour coordonnées $(3, 0, 3)$.

Les vecteurs $l(\vec{v}_1)$ et $l(\vec{v}_2)$ sont linéairement indépendants : on peut soit le vérifier directement, soit remarquer que

$$l(\vec{v}_1) \text{ et } l(\vec{v}_2) \text{ linéairement dépendants} \iff \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ linéairement dépendants} \iff \det(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$$

et que

$$\det(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Par suite $\quad f(P) = P\big(f(N), l(\vec{v}_1), l(\vec{v}_2)\big)$

et $f(P)$ est le plan d'équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 3 \\ y-1 & -2 & 0 \\ z-2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire $\quad x - 3y - z + 3 = 0.$

5. Le plan P′ contient le point N′ $(1, 0, 0)$; si $\vec{v}'\ (\alpha', \beta', \gamma')$ appartient à la direction de P′ on a

$$\alpha' + \beta' + 2\gamma' = 0.$$

Les vecteurs $\vec{v}'_1\ (1, -1, 0)$ et $\vec{v}'_2\ (-2, 0, 1)$ répondent à la question et sont linéairement indépendants.
Donc $P' = P(N', \vec{v}'_1, \vec{v}'_2)$.
D'autre part :
- $f(N')$ a pour coordonnées $(2, 2, 0)$;
- $l(\vec{v}'_1)$ a pour coordonnées $(-1, -1, 1)$;
- $l(\vec{v}'_2)$ a pour coordonnées $(-1, -1, 1)$.

On pouvait prévoir a priori que $l(\vec{v}'_1)$ et $l(\vec{v}'_2)$ étaient linéairement dépendants puisque

$$\det(\vec{u}, \vec{v}'_1, \vec{v}'_2) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On pouvait remarquer aussi que le vecteur $\vec{u}$ appartient à la direction de P′ puisque

$$-3 + 1 + 2 \times 1 = 0.$$

Par suite l'image de P′ est une droite de E; la droite $D\big(f(N'), l(\vec{v}'_1)\big)$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

V. Applications affines particulières

3. 20 TRANSLATIONS

Théorème.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel V. Une application affine f de E dans lui-même est une translation si et seulement si l'application linéaire associée est Id_V.

Autrement dit une application f de E dans lui-même, qui au point M associe le point $f(M)$ noté M′, est une translation si et seulement si

$$\forall (M, N) \in E^2 \qquad \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}.$$

En effet, si f est la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u} \in V$, on a

$$\forall M \in E \qquad f(M) = M + \vec{u}.$$

On en déduit que, pour deux points M, N de E, on a

$$f(N) - f(M) = N - M = \overrightarrow{MN}$$

ce qui montre que f est une application affine admettant Id_V pour application linéaire associée.

Supposons, réciproquement, que f est une application affine admettant Id_V pour application linéaire associée.

Alors, si M est un point de E, on a

$$\forall N \in E \quad f(N) - f(M) = N - M$$

ou, en notant $\vec{u}$ le vecteur $f(M) - M$,

$$\forall N \in E \quad f(N) = N + \vec{u}.$$

Par conséquent f est la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$.

Corollaire.

Toute translation de E est un isomorphisme de E sur lui-même, donc un élément de GLA(E).

Ceci résulte du fait que l'application associée Id_V est un élément de GL (V).

3. 21 FONCTIONS AFFINES

Définition.

Soit E un espace affine associé à un K-espace vectoriel V. On appelle **fonction affine** toute application affine de E dans K, K étant muni de sa structure affine canonique.

EXERCICE

Trouver toutes les applications affines de K^n dans K.

Nous savons que le noyau d'une forme linéaire sur V est un hyperplan vectoriel de V. On peut en déduire :

Théorème.

Si f est une fonction affine non constante de E dans K, pour tout élément α de K, l'ensemble $f^{-1}(\{\alpha\})$ est un hyperplan de E.

Notons l l'application linéaire associée à f (l est une forme linéaire non nulle sur V). L'ensemble $\{\alpha\}$ est une variété linéaire de K de direction $\{\vec{0}\}$, donc $f^{-1}(\{\alpha\})$ est une variété linéaire affine de E de direction $l^{-1}(\{\vec{0}\})$; or $l^{-1}(\{\vec{0}\})$ est un hyperplan de V, et par suite $f^{-1}(\{\alpha\})$ est un hyperplan de E.

On peut énoncer réciproquement :

Théorème.

Si H est un hyperplan d'un espace affine E, associé à un K-espace vectoriel V, pour tout scalaire α il existe une fonction affine f sur E telle que $H = f^{-1}(\{\alpha\})$.

REMARQUE

On dit alors que l'équation $f(M) = \alpha$ est *une équation de* H.

Soit D la direction de H et M un point de H.

On sait qu'il existe au moins une forme linéaire l sur V telle que $D = \operatorname{Ker} l$. Alors la fonction affine définie par

$$\forall N \in E \quad f(N) = \alpha + l(\overrightarrow{MN})$$

vérifie

$$H = f^{-1}(\{\alpha\}).$$

3. 22 HOMOTHÉTIES

a) Définition. Propriétés.

Définition.

Soit E un espace affine associé à un K-espace vectoriel V. On dit qu'une application affine de E dans lui-même est une **homothétie** si l'application linéaire associée est une homothétie vectorielle de V différente de Id_V.

Comme une homothétie vectorielle de V est un élément de GL (V), une homothétie de E est un élément de GLA (E).

D'après la définition, une application f de E dans E est une homothétie s'il existe un scalaire α, non nul et distinct de 1, tel que

$$\forall (M, N) \in E^2 \quad f(N) - f(M) = \alpha \, \overrightarrow{MN}.$$

Le scalaire α est appelé **rapport** de l'homothétie.

Théorème.

Une homothétie f de E a un point invariant est un seul.

Soit α le rapport de l'homothétie f. Si P est un point invariant on a

$$\forall N \in E \quad f(N) = P + \alpha \, \overrightarrow{PN}.$$

Par suite si M est un point de E et $M' = f(M)$ son image on a

$$\overrightarrow{PM'} = \alpha \, \overrightarrow{PM}$$

ou encore

$$\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MM'} = \alpha \, \overrightarrow{PM}$$

d'où

$$\overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\alpha - 1},$$

ce qui prouve l'unicité de P.

Il suffit alors de vérifier que le point P défini par $\overrightarrow{MP} = \dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\alpha - 1}$ est invariant pour obtenir le théorème.

L'unique point invariant d'une homothétie est appelé **centre** de l'homothétie.

Dans un espace affine E, l'homothétie f de centre P et de rapport α est donc l'application définie par

$$\forall M \in E \quad f(M) = P + \alpha \, \overrightarrow{PM}$$

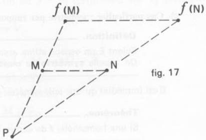


fig. 17

b) Groupe des homothéties-translations.

Il résulte de la définition donnée en *a)* qu'une application affine de E dans lui-même est une homothétie ou une translation si et seulement si l'application linéaire associée est une homothétie vectorielle de V.

Théorème.

L'ensemble ayant pour éléments les homothéties et les translations de E est un sous-groupe de GLA(E).

En effet si f et f' sont des homothéties ou des translations de E, désignons par h_α et $h_{\alpha'}$, les applications linéaires associées (ce sont des homothéties vectorielles de V). L'application affine $f \circ f'^{-1}$ a pour application linéaire associée $h_\alpha \circ (h_{\alpha'})^{-1} = h_{\alpha\alpha'^{-1}}$, donc une homothétie vectorielle de V.
Par suite $f \circ f'^{-1}$ est une homothétie ou une translation de E, et l'ensemble considéré est un sous-groupe de GLA (E).

REMARQUE

On a défini dans l'exercice 3 du paragraphe 16 l'application L de GLA (E) dans GL (V) et on a vu que L était un homomorphisme de groupes.
Il en résulte que l'ensemble constitué des homothéties et des translations de E, étant l'image réciproque par l'homomorphisme L du sous-groupe $\mathcal{H}$ (V) de GL (V), est bien un sous-groupe de GLA (E).

EXERCICE

Montrer que l'image par une homothétie ou une translation d'une variété linéaire affine de E est une variété linéaire affine de même direction.

Nous avons démontré, au § 1.17, que les homothéties de V étaient caractérisées par le fait qu'elles laissaient globalement invariantes les droites vectorielles de V. On en déduit ici :

Théorème.

Soit E un espace affine. Une application affine f de E dans lui-même est une homothétie ou une translation si et seulement si l'image par f de toute droite de E est une droite de E qui lui est parallèle.

En effet si l est l'application linéaire associée à f on a :

f transforme toute droite de E en une droite parallèle $\Longleftrightarrow$ l laisse globalement invariante toute droite vectorielle de V.
$\Longleftrightarrow$ l est une homothétie vectorielle de V.
$\Longleftrightarrow$ f est une homothétie ou une translation de E.

c) Cas particulier : symétrie par rapport à un point.

Définition.

Soient E un espace affine associé à un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$ et P un point de E. On appelle **symétrie de centre** P l'homothétie de centre P et de rapport -1.

Il est immédiat qu'une telle symétrie est une homothétie involutive. On a réciproquement :

Théorème.

Si une homothétie f de centre P de E est involutive f est la symétrie de centre P.

Si f est l'homothétie de centre P et de rapport α, on a

$$f^2 = \mathrm{Id}_E \Longrightarrow h_\alpha^2 = \mathrm{Id}_V \Longrightarrow h_{\alpha^2} = \mathrm{Id}_V \Longrightarrow \alpha^2 = 1$$

d'où

$$\alpha = -1 \text{ puisque, par définition, on a } \alpha \neq 1.$$

1. 23 PROJECTIONS

a) Définition. Propriétés.

Dans un espace vectoriel V on a appelé projection, ou projecteur, tout endomorphisme p de V tel que $p^2 = p$.
De même, nous dirons :

Définition.

Soit E un espace affine. On dit qu'une application affine f de E dans lui-même est une **projection** si $f^2 = f$.

On a alors :

Théorème.

Soient E un espace affine associé à un espace vectoriel V et f une application affine de E dans lui-même. Si f est une projection, l'application linéaire associée à f est un projecteur de V.

En effet, si p désigne l'application linéaire associée à f, p^2 est l'application linéaire associée à f^2, et de l'égalité $f^2 = f$ on déduit $p^2 = p$, ce qui montre que p est un projecteur de V.

REMARQUE

Nous verrons en exercice que la réciproque de ce résultat est fausse.

b) Interprétation géométrique d'une projection.

Si f est une projection de l'espace affine E, on a

$$\forall M \in E \quad f[f(M)] = f(M)$$

ce qui montre que tout point de la variété linéaire affine E_1, image de f, est invariant par f.
L'application linéaire p associée à f étant un projecteur de V, on peut décomposer V en une somme directe $V_1 \oplus V_2$ telle que l'on ait $p = p_1$ (projection sur V_1 parallèlement à V_2).
Alors E_1 a pour direction Im p_1, c'est-à-dire V_1.
Si M est un point de E, de l'égalité

$$f^2(M) - f(M) = p_1(f(M - M) = \vec{0}$$

on déduit $\quad f(M) - M \in V_2$.

Par suite on a $\quad \forall M \in E \quad f(M) \in E_1$

et $\quad f(M) - M \in V_2$.

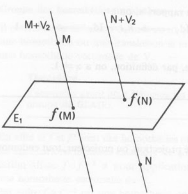
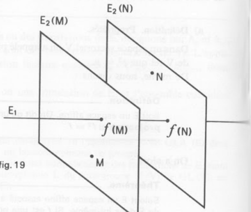


fig. 18 (Figure lorsque $\dim E = 3$, $\dim E_1 = 2$)



(Figure lorsque $\dim E = 3$, $\dim E_1 = 1$) fig. 19

Alors, en désignant par $E_2(M)$ la variété linéaire affine $M + V_2$, de direction V_2 et contenant M, on obtient : $f(M)$ est l'unique point appartenant à l'intersection des variétés linéaires affines supplémentaires E_1 et $E_2(M)$ (fig. 18 et 19).

Réciproquement considérons une variété linéaire affine E_1 de E de direction V_1 et un supplémentaire V_2 de V_1 dans V. Nous allons montrer que l'application f de E dans lui-même définie par

$$\forall M \in E \qquad \{f(M)\} = E_1 \cap E_2(M) ,$$

où $E_2(M) = M + V_2$, est une projection.

• D'une part f est affine.

Si M et N sont deux points de E, les points $f(M)$ et $f(N)$ sont caractérisés par

$$f(M) \in E_1 \quad f(M) - M \in V_2$$
$$f(N) \in E_1 \quad f(N) - N \in V_2 .$$

Comme $\quad N - M = (N - f(N)) + (f(N) - f(M)) + (f(M) - M)$

et $\quad (N - f(N)) + (f(M) - M) \in V_2 \quad , \quad f(N) - f(M) \in V_1 \quad ,$

on en déduit $\quad f(N) - f(M) = p_1(N - M).$

où p_1 est la projection sur V_1 parallèlement à V_2.

L'application f est donc affine et admet p_1 pour application linéaire associée.

• D'autre part on a $f^2 = f$.

En effet, $\forall M \in E \;\; f(M) \in E_1$ et comme tout point de E_1 est évidemment invariant, on a $f(f(M)) = f(M)$.

Nous obtenons finalement :

Théorème et définition.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel V. Une application f de E dans lui-même est une projection si, et seulement si, il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires V_1 et V_2 de V et une variété linéaire affine E_1 de direction V_1, tels que

$$\forall M \in E \qquad \{f(M)\} = E_1 \cap (M + V_2).$$

On dit dans ce cas que f **est la projection sur** E_1 **parallèlement** à V_2.

La variété linéaire affine E_1 est appelée **base** de la projection et le sous-espace vectoriel V_2 est appelé **direction** de la projection.

EXERCICES

E est un espace affine de dimension 3 associé à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de E.

1. Montrer que l'application de E dans lui-même qui au point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M′ de coordonnées (x', y', z') telles que

$$x' = -y + z - 1$$
$$y' = -x + z - 1$$
$$z' = -x - y + 2z - 1$$

est une projection.
Déterminer ses éléments : base, direction.

2. Montrer que l'application de E dans lui-même qui au point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M′ de coordonnées (x', y', z') telles que

$$x' = 2x - 2z - 3$$
$$y' = x - z - 2$$
$$z' = x - z - 3$$

est une projection.
Déterminer ses éléments : base, direction.

c) Application : Théorème de THALÈS.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

Théorème.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel V. Étant données deux droites Δ_1, Δ_2 de E et trois hyperplans parallèles, H, H′, H″ de E rencontrant Δ_1 (resp. Δ_2) en trois points distincts M_1, M_1', M_1'' (resp. M_2, M_2', M_2'') on a

$$\frac{\overline{M_1M_1''}}{\overline{M_1M_1'}} = \frac{\overline{M_2M_2''}}{\overline{M_2M_2'}} \quad ,$$

les mesures algébriques étant relatives à deux vecteurs directeurs quelconques $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ de Δ_1 et Δ_2.

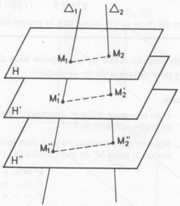
Notons D la direction commune des trois hyperplans H, H′, H″ et D_1 (resp. D_2) la direction de la droite Δ_1 (resp. Δ_2). La relation $\Delta_2 \cap H = \{M_2\}$ implique $D_2 \cap D = \{\vec{0}\}$ et comme D est un hyperplan de V, on en déduit que $V = D \oplus D_2$.

Notons π la restriction à Δ_1 de la projection sur Δ_2 parallèlement à D. On a alors

$$M_2 = \pi(M_1)$$
$$M'_2 = \pi(M'_1)$$
$$M''_2 = \pi(M''_1) \quad \text{(fig. 20).}$$

fig. 20

(Figure lorsque dim E = 3)



π est une application affine de Δ_1 dans Δ_2 admettant pour application linéaire associée, la restriction à D_1 de la projection p sur D_2 parallèlement à D.

De l'égalité

$$\overrightarrow{M_1M''_1} = \frac{\overline{M_1M''_1}}{\overline{M_1M'_1}} \cdot \overrightarrow{M_1M'_1}$$

on déduit

$$p(\overrightarrow{M_1M''_1}) = \frac{\overline{M_1M''_1}}{\overline{M_1M'_1}} \cdot p(\overrightarrow{M_1M'_1})$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{M_2M''_2} = \frac{\overline{M_1M''_1}}{\overline{M_1M'_1}} \cdot \overrightarrow{M_2M'_2}$$

ou

$$\overrightarrow{M_2M''_2} = \frac{\overline{M_2M''_2}}{\overline{M_2M'_2}} \cdot \overrightarrow{M_2M'_2}$$

et on obtient donc

$$\frac{\overline{M_1M''_1}}{\overline{M_1M'_1}} = \frac{\overline{M_2M''_2}}{\overline{M_2M'_2}}.$$

REMARQUE

Il résulte des hypothèses du théorème que (M_1, M'_1) constitue un repère affine de la droite Δ_1; de même (M_2, M'_2) constitue un repère affine de la droite Δ_2. D'une manière générale, étant donnés une droite Δ et un repère affine (M, M') de Δ, on appelle abscisse dans ce repère d'un point M'' de Δ, la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{MM''}$ par rapport au vecteur $\overrightarrow{MM'}$; par exemple, M a pour abscisse 0, M' a pour abscisse 1.
On peut alors énoncer le résultat qui vient d'être démontré de la manière suivante : l'abscisse de $\pi(M''_1)$ dans le repère $(\pi(M_1), \pi(M'_1))$ est égale à l'abscisse de M''_1 dans le repère (M_1, M'_1).

EXERCICES

3. Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites d'un plan affine et M_1, N_1, P_1 (resp. M_2, N_2, P_2) trois points distincts de Δ_1 (resp. Δ_2) tels que
(i) (M_1M_2) et (N_1N_2) soient parallèles
(ii) $$\frac{\overline{M_1P_1}}{\overline{M_1N_1}} = \frac{\overline{M_2P_2}}{\overline{M_2N_2}}.$$
Montrer qu'alors (P_1P_2) est parallèle à (M_1M_2) et (N_1N_2).
4. Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites non coplanaires d'un espace affine de dimension 3. On considère trois points distincts M_1, N_1, P_1 (resp. M_2, N_2, P_2) de Δ_1 (resp. Δ_2).
Montrer d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{N_1N_2}$ sont linéairement indépendants. On notera D la direction du plan vectoriel engendré par $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{N_1N_2}$.
On suppose maintenant que $\frac{\overline{M_1P_1}}{\overline{M_1N_1}} = \frac{\overline{M_2P_2}}{\overline{M_2N_2}}$. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ appartient à D.
Énoncer ce résultat.

3. 24 SYMÉTRIES

On suppose le corps K de caractéristique différente de 2.

a) Définition. Propriétés.

Dans un espace vectoriel V, on a appelé symétrie vectorielle toute application linéaire s, de V dans lui-même, involutive (i.e. $s^2 = \mathrm{Id}_V$).
De même nous dirons :

Définition.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel V. On appelle **symétrie** toute application affine involutive f de E dans lui-même (i.e. $f^2 = \mathrm{Id}_E$).

On a alors :

Théorème.

Si f est une symétrie de E l'application linéaire associée à f est une symétrie vectorielle de V.

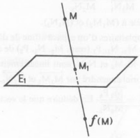
Désignons par s l'application linéaire associée à f. L'application linéaire associée à f^2 étant s^2, il résulte de l'égalité $f^2 = \mathrm{Id}_E$ que l'on a $s^2 = \mathrm{Id}_V$ et donc que s est une symétrie vectorielle de V.

b) Interprétation géométrique d'une symétrie.

Soient f une symétrie de E et s l'application linéaire associée à f.
Montrons d'abord que la variété linéaire affine E_1 des points invariants de f n'est pas vide :
si $M \in E$, soit P le milieu de M et $f(M)$; f étant affine $f(P)$ est le milieu de $f(M)$ et $f^2(M) = M$, donc $f(P) = P$.
Nous savons, d'autre part (cf. § 1.19) que s étant une symétrie de V, on peut décomposer V en une somme directe $V_1 \oplus V_2$ telle que, avec les notations habituelles, on ait $s = p_1 - p_2$.

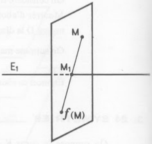
Alors E_1 a pour direction le sous-espace vectoriel des éléments invariants de s, c'est-à-dire V_1. Considérons alors un point M de E et sa projection M_1 sur E_1 parallèlement à V_2 (fig. 21 et 22).

fig. 21



(Figure dans le cas $\dim E = 3$, $\dim E_1 = 2$)

fig. 22



(Figure dans le cas $\dim E = 3$, $\dim E_1 = 1$)

On a $$f(M) - f(M_1) = (p_1 - p_2)(M - M_1)$$
or $$M - M_1 \in V_2$$
donc $$(p_1 - p_2)(M - M_1) = M_1 - M$$
et $$f(M) - f(M_1) = M_1 - M.$$

Comme $f(M_1) = M_1$, on en déduit
$$f(M) - M_1 = M_1 - M$$
ce qui montre que M_1 est le milieu de M et $f(M)$, ce que l'on peut écrire
$$f(M) = M + 2\,\overrightarrow{MM_1}.$$

Réciproquement, considérons une variété linéaire affine E_1 de E, de direction V_1 et un supplémentaire V_2 de V_1 dans V.

Nous allons montrer que l'application f de E dans lui-même définie par
$$\forall\, M \in E \quad f(M) = M + 2\overrightarrow{MM_1}$$
où M_1 est la projection de M sur E_1 parallèlement à V_2, est une symétrie.

• D'une part f est affine. Si M et N sont deux points de E, on a
$$f(M) = M + 2\,\overrightarrow{MM_1} \quad \text{et} \quad f(N) = N + 2\,\overrightarrow{NN_1}$$
d'où $$f(N) - f(M) = \overrightarrow{MN} + 2\left(\overrightarrow{NN_1} - \overrightarrow{MM_1}\right)$$
or
$$\overrightarrow{NN_1} - \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MN_1} - \left(\overrightarrow{MN_1} + \overrightarrow{N_1M_1}\right)$$
$$= \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{M_1N_1}$$
et par suite
$$f(N) - f(M) = 2\,\overrightarrow{M_1N_1} - \overrightarrow{MN}.$$

Or $$\overrightarrow{M_1N_1} = p_1\left(\overrightarrow{MN}\right),$$
on obtient alors
$$f(N) - f(M) = (2p_1 - \mathrm{Id}_V)\left(\overrightarrow{MN}\right)$$
et puisque $\mathrm{Id}_V = p_1 + p_2$,
$$f(N) - f(M) = (p_1 - p_2)\left(\overrightarrow{MN}\right)$$
ce qui montre que f est affine et que l'application linéaire associée est $p_1 - p_2$.

• D'autre part f est involutive.

En effet $f(M)$ et M ont même projection M_1 sur E_1 parallèlement à V_2, il en résulte que M_1 est à la fois le milieu de M et $f(M)$ et le milieu de $f(M)$ et de $f^2(M)$, donc que
$$f^2(M) = M.$$

On obtient finalement :

Théorème et définition.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel V. Une application f de E dans lui-même est une symétrie si et seulement s'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires V_1 et V_2 de V et une variété linéaire affine E_1 de E, de direction V_1, tels que
$$\forall M \in E \qquad f(M) = M + 2\,\overrightarrow{MM_1}$$
où M_1 est la projection de M sur E_1 parallèlement à V_2. On dit dans ce cas que f est **la symétrie par rapport à** E_1 (ou de base E_1) **de direction** V_2 (ou parallèlement à V_2).

REMARQUE IMPORTANTE

Si V est un espace vectoriel sur K, nous avons vu que l'on pouvait munir V d'une structure affine canonique. Nous devons alors distinguer

• d'une part les symétries vectorielles de l'espace vectoriel V,

• d'autre part les symétries de l'espace affine V.

On peut évidemment considérer les symétries vectorielles de l'espace vectoriel V comme des symétries particulières de l'espace affine V, à savoir des symétries ayant pour base un sous-espace vectoriel de V; c'est pourquoi, dans la suite, nous dirons soit « *symétrie vectorielle* » soit « *symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel* ».

EXERCICES

1. E est un plan affine associé à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de E. Si $M \in E$ on note (x, y) ses coordonnées cartésiennes.
On désigne par f la symétrie par rapport à la droite d'équation $x + y = 1$, parallèlement au sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\vec{u}\,(1, 2)$. Exprimer les coordonnées (x', y') de $f(M)$ en fonction de x et y.

2. E est un espace affine de dimension 3 associé à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de E. Si $M \in E$ on note (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes.
Montrer que l'application f de E dans lui-même qui à M associe le point $f(M)$ de coordonnées (x', y', z') telles que
$$x' = 3x - 4z - 6$$
$$y' = 2x - y - 2z - 4$$
$$z' = 2x - 3z - 6$$
est une symétrie dont on déterminera les éléments (base, direction).

3. 25 AFFINITÉS

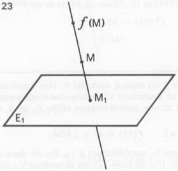
Définition.

Soit E un espace affine associé à un K-espace vectoriel V. Si E_1 est une variété linéaire affine de E, de direction V_1, V_2 un supplémentaire de V_1 dans V et α un scalaire, on appelle **affinité de base** E_1, **de direction** V_2 **et de rapport** α l'application f de E dans lui-même définie par :

$$\forall M \in E \qquad f(M) = M_1 + \alpha \overrightarrow{M_1M}$$

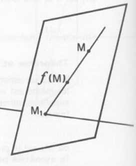
où M_1 est la projection de M sur E_1 parallèlement à V_2.

fig. 23



(Figure dans le cas dim E = 3, dim E_1 = 2, α = 2)

fig. 24



(Figure dans le cas dim E = 3, dim E_1 = 1, $\alpha = \frac{1}{2}$)

Avec les notations habituelles, on a :

Théorème.

L'affinité f de base E_1, de direction V_2 et de rapport α est une application affine admettant pour application linéaire associée $p_1 + \alpha p_2$, et ayant E_1 comme ensemble de points invariants lorsque $\alpha \neq 1$.

Si M et N sont deux points de E, on a

$$f(M) = M_1 + \alpha \overrightarrow{M_1M} \quad \text{et} \quad f(N) = N_1 + \alpha \overrightarrow{N_1N}$$

d'où

$$f(N) - f(M) = \overrightarrow{M_1N_1} + \alpha\left(\overrightarrow{N_1N} - \overrightarrow{M_1M}\right)$$

On a vu, au paragraphe précédent, que

$$\overrightarrow{N_1N} - \overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M_1N_1}$$

donc

$$\begin{aligned} f(N) - f(M) &= \overrightarrow{M_1N_1} + \alpha\left(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M_1N_1}\right) \\ &= (1-\alpha)\overrightarrow{M_1N_1} + \alpha\overrightarrow{MN} \\ &= \left[(1-\alpha)p_1 + \alpha\,\mathrm{Id}_V\right]\left(\overrightarrow{MN}\right) \end{aligned}$$

et puisque $\mathrm{Id}_V = p_1 + p_2$

$$f(N) - f(M) = (p_1 + \alpha p_2)\left(\overrightarrow{MN}\right) \quad ,$$

ce qui montre que f est affine et a pour application linéaire associée $p_1 + \alpha p_2$.

Supposons maintenant $\alpha \neq 1$ et montrons que, dans ce cas, E_1 est la variété linéaire affine des points invariants de f.

Nous savons que cette variété, si elle n'est pas vide, a pour direction le sous-espace des vecteurs invariants de $p_1 + \alpha p_2$.

Or

$$\begin{aligned} (p_1 + \alpha p_2)(\vec{u}) = \vec{u} &\iff (p_1 + \alpha p_2)(\vec{u}) = (p_1 + p_2)(\vec{u}) \\ &\iff (\alpha - 1)\, p_2(\vec{u}) = \vec{0} \\ &\iff p_2(\vec{u}) = \vec{0} \qquad \text{puisque } \alpha \neq 1 \\ &\iff \vec{u} \in V_1. \end{aligned}$$

Finalement la variété linéaire affine des points invariants de f contient E_1, elle a pour direction V_1, par suite elle est égale à E_1.

EXERCICES

1. E est un espace affine de dimension 3 associé à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de E. Si $M \in E$ on désigne par (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes.
Montrer que l'application f de E dans lui-même qui à M associe le point $f(M)$ de coordonnées (x', y', z') telles que

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 2y - 2z + 2 \\ y' &= 2x + 3y - 2z + 2 \\ z' &= 2x + 2y - z + 2 \end{aligned}$$

est une affinité dont on déterminera la base, la direction, le rapport.

2. E est un espace affine de dimension 3 associé à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de E. Si $M \in E$ on désigne par (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes.
Soit f l'affinité ayant pour base la droite $D(M_0, \vec{u})$ où M_0 a pour coordonnées (1, 0, 2) et $\vec{u}$ a pour coordonnées (2, 1, 1), ayant pour direction le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{u}_1$ (1, 1, 0) et $\vec{u}_2$ (0, 3, 1) et de rapport 2.
Déterminer les coordonnées (x', y', z') de $f(M)$ en fonction de x, y, z.

Théorème.

L'ensemble des affinités de base E_1, de direction V_2 et de rapport non nul a, pour la composition des applications, une structure de groupe commutatif, isomorphe à K*.

C'est une conséquence du résultat suivant : si f et f' sont deux telles affinités de rapports α, α', $f \circ f'$ est l'affinité de base E_1, de direction V_2 et de rapport $\alpha\alpha'$. La vérification est facile et est laissée au lecteur.

EXERCICE

3. *Affinités conjuguées.*
On considère dans E deux variétés linéaires affines E_1 et E_2 supplémentaires. Soient V_1 et V_2 leurs directions respectives.
Si α est un scalaire, l'affinité f_1 de base E_1, de direction V_2, de rapport α, et l'affinité f_2 de base E_2, de direction V_1, de rapport α, sont dites conjuguées.
Déterminer $f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$; en conclure que l'on a toujours $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$ et que, lorsque $\alpha \neq 0$ $f_2 \circ f_1$ est l'homothétie de centre M et de rapport α, où $\{M\} = E_1 \cap E_2$.

EXERCICES

3.1 Soit E un espace affine associé à un K-espace vectoriel. On dit qu'un quadruplet (A, B, C, D) de points de E est un parallélogramme si l'on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ce qui est équivalent à $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$). Établir que, lorsque K est de caractéristique différente de 2, (A, B, C, D) est un parallélogramme si et seulement si les couples (A, C) et (B, D) ont même milieu.

3.2 Dans un espace affine E associé à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ on considère deux triplets de points (A, B, C) et (A′, B′, C′).
Soient G et G′ les centres de gravité des triangles ABC et A′B′C′.
Montrer que $$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\,\overrightarrow{GG'}.$$

3.3 Montrer que la variété linéaire affine engendrée par n points d'un espace affine E est de dimension finie au plus égale à $n - 1$.

3.4 Soient E et E′ deux espaces affines et $(M_0, \dots, M_n)$ un repère affine de E. Montrer qu'une application affine f de E dans E′ est un isomorphisme si et seulement si la famille $(f(M_0), \dots, f(M_n))$ est un repère affine de E′.

3.5 Soit E un espace affine associé à un K-espace vectoriel. Montrer qu'une application affine f de K dans E est déterminée par les points $f(0)$ et $f(1)$. En déduire une bijection de l'ensemble des applications affines de K dans E sur E × E.

3.6 Montrer que si E et E′ sont deux espaces affines de même dimension il existe un isomorphisme de groupes de GLA (E) sur GLA (E′).

3.7 Soit E un espace affine associé à un K-espace vectoriel. Étant donné un hyperplan H de E d'équation $f(M) = 0$, où f est une fonction affine, montrer que l'équation générale des hyperplans parallèles à H est $f(M) = \lambda$ où λ décrit K.

3.8 Soit H un hyperplan d'un espace affine E et D sa direction dans le K-espace vectoriel V associé à E.
1° Montrer que l'ensemble des formes linéaires l sur E telles que $D \subset \operatorname{Ker} l$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathcal{L}$ (E, K).
(Indication : on montrera que si $\vec{u}$ est un vecteur de V n'appartenant pas à D une forme linéaire l s'annulant sur D est déterminée par le scalaire $l(\vec{u})$. On en déduira un isomorphisme d'espaces vectoriels de l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur D sur K.)
2° En déduire que si f_1 et f_2 sont deux fonctions affines sur E telles que
$$H = f_1^{-1}(\{0\}) = f_2^{-1}(\{0\})$$
il existe un scalaire non nul λ tel que $f_2 = \lambda f_1$.

3.9 **Intersection d'un hyperplan et d'une droite.**

Soit E un espace affine associé à un K-espace vectoriel V.
On considère un hyperplan H de E d'équation $f(M) = 0$, où f est une fonction affine, et la droite $D = D(M_0, \vec{u})$.
Déterminer l'ensemble H ∩ D selon la valeur de $l(\vec{u})$, l étant la forme linéaire associée à f.

3.10 Soient E et E′ deux espaces affines de dimension 2, (A, B, C) un repère affine de E, (A′, B′, C′) un repère affine de E′.
Si f est une application affine de E dans E′ on note
- $(\alpha^1, \beta^1, \gamma^1)$ les coordonnées barycentriques de f(A) dans le repère (A′, B′, C′);
- $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ les coordonnées barycentriques de f(B) dans le repère (A′, B′, C′);
- $(\alpha^3, \beta^3, \gamma^3)$ les coordonnées barycentriques de f(C) dans le repère (A′, B′, C′).

Étant donné un point M de E de coordonnées barycentriques (x, y, z) dans le repère (A, B, C), montrer que les coordonnées barycentriques (x', y', z') de f(M) dans le repère (A′, B′, C′) sont données par
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 \\ \gamma^1 & \gamma^2 & \gamma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3.11 Étant donnés un corps commutatif K et un ensemble I, on considère l'application
$$\sigma : K^{(I)} \longrightarrow K$$
$$(\alpha^i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} \alpha^i.$$

1° Montrer que σ est une forme linéaire non nulle. On notera H l'hyperplan noyau de σ.

2° Soit $$A = \sigma^{-1}(\{1\}) = \left\{ (\alpha^i)_{i\in I} \mid (\alpha^i)_{i\in I} \in K^{(I)}, \sum_{i\in I} \alpha^i = 1 \right\}.$$

Montrer que l'on peut munir A, de manière canonique, d'une structure d'espace affine associé à l'espace vectoriel H.
3° Soit E un espace affine associé à un K-espace vectoriel V.
Montrer que, si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille donnée de points de E, l'application
$$b : A \longrightarrow E$$
$$(\alpha^i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} \alpha^i M_i$$
est affine.
(On rappelle que, lorsque $\sum_{i\in I} \alpha^i = 1$, $\sum_{i\in I} \alpha^i M_i$ désigne le barycentre des points M_i affectés des coefficients α^i.)

3.12 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien d'un plan affine P. On considère trois points M, M′, M″ de P de coordonnées (x, y), (x', y'), (x'', y'') dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Montrer que les points M, M′, M″ sont alignés si et seulement si le déterminant
$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ est nul.}$$

3.13 On considère un espace affine E associé à un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, et un espace affine E′ associé à un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
Étant donnés un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E et un repère cartésien $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ de E′, soit f l'application affine telle que f(O) ait pour coordonnées (1, 0) et telle que l'application linéaire l associée à f vérifie
$$l(\vec{i}) = 2\,\vec{i}' - \vec{j}'$$
$$l(\vec{j}) = \vec{i}' + \vec{j}'$$
$$l(\vec{k}) = \vec{i}' + 3\,\vec{j}'.$$

1° Si M a pour coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ quelles sont les coordonnées (x', y') de f(M) dans le repère $(O', \vec{i}', \vec{j}')$?
2° Quelle est l'image par f du plan P_1 de E d'équation $x + 3y - z + 1 = 0$?
3° Quelle est l'image du plan P_2 d'équation $x + 2y + 4z + 1 = 0$?
Expliquer le résultat.
4° Quelle est l'image de la droite $D(A, \vec{u})$ où A a pour coordonnées (5, 3, − 15) et $\vec{u}$ (2, 3, − 7)?

3.14 Soit E un espace affine de dimension 3 et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de E.
Montrer que l'application f de E dans lui-même qui au point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') telles que

$$\begin{aligned} x' &= -x - 2y - 4z - 6 \\ y' &= -x + 2z - 3 \\ z' &= -x - y + 3z - 3 \end{aligned}$$

est une projection dont on déterminera la base et la direction.

3.15 Montrer que, dans un espace affine E, toute affinité de rapport non nul est un élément du groupe GLA (E).

3.16 Soit E un espace affine associé au K-espace vectoriel V.
Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de V, on note p_1 (resp. p_2) la projection sur V_1 (resp. V_2) parallèlement à V_2 (resp. V_1).

1° Montrer que toute application affine de E dans lui-même ayant au moins un point invariant et admettant pour application linéaire associée $p_1 + \alpha p_2$, où $\alpha \in K$ est une affinité de E.

2° En déduire que si f est une application affine de E dans lui-même admettant pour application linéaire associée $p_1 + \alpha p_2$, où $\alpha \in K$, on peut écrire $f = t \circ g$ où g est une affinité et t une translation.

3.17 Soit E un espace affine associé au K-espace vectoriel V.
Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de V et E_1 une variété linéaire affine de E de direction V_1, on note π la projection sur E_1 parallèlement à V_2.
Étant donné un vecteur non nul $\vec{u}_1$ de V_1, montrer que l'application affine $t_{\vec{u}_1} \circ \pi$ de E dans lui-même n'a aucun point invariant. Quelle est l'application linéaire associée à $t_{\vec{u}_1} \circ \pi$?

Remarque : on a vu dans le cours que si π est une projection de E, l'application linéaire associée p est un projecteur de V. Le résultat précédent montre que la réciproque est fausse, puisqu'une projection a toujours au moins un point invariant.

3.18 Soit E un espace affine associé au K-espace vectoriel V.
Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de V, montrer que l'ensemble G constitué

- d'une part, des affinités ayant une base de direction V_2, de direction V_1 et de rapport non nul;
- d'autre part, des translations $t_{\vec{u}}$ où $\vec{u} \in V_2$

a, pour la composition des applications, une structure de groupe.

3.19 1° Montrer que dans un espace affine toute translation est d'une infinité de manières la composée de deux affinités.

2° On se place dans un espace affine E de dimension 2.

a) Montrer qu'étant donnés trois points non alignés O, A, A', il existe une infinité d'affinités f telles que
$$f(O) = O \quad \text{et} \quad f(A) = A'.$$
Montrer que si D est une droite contenant O et ne contenant ni A ni A', il existe une seule affinité f dont D est l'ensemble des points invariants et telle que $f(A) = A'$.

b) Montrer que pour tout couple de triplets de points non alignés ((O, A, B), (O', A', B')), on peut trouver n affinités, avec $1 \leqslant n \leqslant 4$, dont la composée f soit telle que
$$f(O) = O' \quad , \quad f(A) = A' \quad , \quad f(B) = B'.$$
En déduire que l'ensemble des affinités de E est une partie génératrice du groupe GLA (E).

3° Pouvez-vous généraliser ce résultat à un espace affine de dimension 3?

3.20 Montrer que dans un espace affine E de dimension n toute homothétie de centre O et de rapport α est d'une infinité de manières la composée de n affinités de rapport α.

3.21 Dans un espace affine E on considère l'homothétie h_1 de centre O_1 et de rapport α et l'homothétie h_2 de centre O_2 et de rapport $\frac{1}{\alpha}\cdot$ Montrer que les composées $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ sont des translations.
A quels vecteurs sont-elles associées?
Peut-on avoir $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$?

3.22 Dans un espace affine E associé à un K-espace vectoriel, on considère p points $O_1, \ldots, O_p$.
On note h_i $(i = 1, \ldots, p)$ l'homothétie de centre O_i et de rapport α_i, $\alpha_i \neq 1$.

1° Montrer que $f = h_p \circ \ldots \circ h_1$ est une homothétie si $\alpha_1 \ldots \alpha_p \neq 1$, une translation si $\alpha_1 \ldots \alpha_p = 1$.

2° Lorsque f est une homothétie, montrer que le centre O de f appartient à la variété linéaire affine engendrée par $\{O_1, \ldots, O_p\}$.
Plus précisément, établir que O est le barycentre des points $O_1, O_2, \ldots, O_{p-1}, O_p$ affectés des coefficients $\alpha_p \ldots \alpha_2 - \alpha_p \ldots \alpha_1, \alpha_p \ldots \alpha_3 - \alpha_p \ldots \alpha_2, \ldots, \alpha_p - \alpha_p\alpha_{p-1}, 1 - \alpha_p$.

3° Lorsque f est une translation $t_{\vec{u}}$ déterminer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des points $O_1, \ldots, O_p$ (on demande de trouver $\vec{u}$ sous la forme $\sum_{i=1}^{p} \beta^i O_i$ avec $\sum_{i=1}^{p} \beta^i = 0$).

3.23 Dans un espace affine E associé à un K-espace vectoriel V on considère deux variétés linéaires affines supplémentaires E_1 et E_2 de directions V_1 et V_2.
On note s_1 (resp. s_2) la symétrie par rapport à E_1 (resp. E_2) de direction V_2 (resp. V_1).
Montrer que $s_2 \circ s_1$ est une symétrie ponctuelle dont on déterminera le centre. En déduire que
$$s_2 \circ s_1 = s_1 \circ s_2.$$
(Indication : on pourra, par exemple, s'inspirer de l'exercice du cours relatif à la composition d'affinités conjuguées.)

3.24 Soit E un espace affine associé à un K-espace vectoriel V.

1° Montrer que si V' est un sous-espace vectoriel de V et $\vec{u}$ un vecteur de V n'appartenant pas à V' il existe au moins un hyperplan H de V contenant V' et ne contenant pas $\vec{u}$.

2° En déduire qu'étant donnée une variété linéaire affine non vide E' de E et un point M n'appartenant pas à E' il existe au moins un hyperplan de E contenant E' et ne contenant pas M.
(Indication : on notera V' la direction de E' et on considérera le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{PM}$ où P est un point fixé de E'.)

3° Conclure que dans un espace affine toute variété linéaire affine non vide est l'intersection des hyperplans qui la contiennent.

3.25 Soit E un espace affine de dimension 2 et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de E.
On considère les droites D, D', D'' de E d'équations respectives
$$ux + vy + h = 0 \quad , \quad u'x + v'y + h' = 0 \quad , \quad u''x + v''y + h'' = 0.$$
On se propose de montrer que les droites D, D', D'' sont concourantes si et seulement si le déterminant de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} u & v & h \\ u' & v' & h' \\ u'' & v'' & h'' \end{pmatrix}$$
est nul.

1° Montrer que si les droites D, D', D'' sont concourantes les vecteurs colonnes de A sont linéairement dépendants et donc que det A = 0.

2° Réciproquement si det A = 0 les vecteurs colonnes de A sont linéairement dépendants. En déduire qu'il existe un point commun à D, D', D''.

3.26 Faisceaux de droites.

Soit E un plan affine et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien de E. Si M est un point de E on note (x, y) ses coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application f de $K^3 - \{0, 0, 0\}$ dans l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites de E définie par : $\forall (u, v, h) \in K^3 - \{0, 0, 0\}$ $f(u, v, h)$ est la droite d'équation $ux + vy + h = 0$.

1° Montrer que f est surjective et que, si K a plus de deux éléments, f n'est pas injective.

2° On appelle faisceau de droites de E l'image par f d'une droite affine de K^3 ne contenant pas $(0, 0, 0)$.
Autrement dit si
$$m_1 = (u_1, v_1, h_1) \quad \text{et} \quad m_2 = (u_2, v_2, h_2)$$
sont deux points de $K^3 - \{0, 0, 0\}$ tels que leurs coordonnées ne soient pas proportionnelles, ils déterminent une droite de K^3 ne contenant pas $(0, 0, 0)$ et l'image de celle-ci par f est un faisceau de droites de E. Celui-ci est l'ensemble des droites de E ayant une équation de la forme
$$(\lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2)\, x + (\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2)\, y + \lambda^1 h_1 + \lambda^2 h_2 = 0$$
où λ^1 et λ^2 sont deux scalaires tels que $\lambda^1 + \lambda^2 = 1$.

a) Montrer que la restriction de f à la droite $(m_1 m_2)$ est injective.

b) Montrer que ou bien toutes les droites du faisceau défini par m_1 et m_2 sont parallèles, ou bien qu'il existe un et un seul point M de E commun à toutes ces droites et que dans ce dernier cas le faisceau considéré est exactement l'ensemble des droites contenant M.

3.27 Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine E.
On note α, β, γ les milieux respectifs de B et C, C et A, A et B.
Considérons alors un point O de E et les images A', B', C' des points α, β, γ par l'homothétie h de centre O et de rapport 2.
Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes.

3.28 Faisceaux de plans.

Soit E un espace affine de dimension 3 et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de E. Si M est un point de E on note (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère l'application f de $K^4 - \{0, 0, 0, 0\}$ dans l'ensemble $\mathcal{P}$ des plans de E définie par : $\forall (u, v, w, h) \in K^4 - \{0, 0, 0, 0\}$ $f(u, v, w, h)$ est le plan d'équation
$$ux + vy + wz + h = 0.$$

1° Montrer que f est surjective et que, si K a plus de deux éléments, f n'est pas injective.

2° On appelle faisceau de plans de E l'image par f d'une droite affine de K^4 ne contenant pas $(0, 0, 0, 0)$.
Autrement dit si
$$m_1 = (u_1, v_1, w_1, h_1) \quad \text{et} \quad m_2 = (u_2, v_2, w_2, h_2)$$
sont deux points de $K^4 - \{0, 0, 0, 0\}$ tels que leurs coordonnées ne soient pas proportionnelles, ils déterminent une droite de K^4 ne contenant pas $(0, 0, 0, 0)$ et l'image de celle-ci par f est un faisceau de plans de E. Celui-ci est l'ensemble des plans de E ayant une équation de la forme
$$(\lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2)\, x + (\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2)\, y + (\lambda^1 w_1 + \lambda^2 w_2)\, z + \lambda^1 h_1 + \lambda^2 h_2 = 0$$
où λ^1 et λ^2 sont deux scalaires tels que $\lambda^1 + \lambda^2 = 1$.

a) Montrer que la restriction de f à la droite $(m_1 m_2)$ est injective.

b) Montrer que ou bien tous les plans du faisceau défini par m_1 et m_2 sont parallèles, ou bien qu'il existe une et une seule droite D de E commune à tous ces plans et que dans ce dernier cas le faisceau considéré est exactement l'ensemble des plans de E contenant D.

3.29 Soit E un espace affine de dimension 3 associé à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de E. Si M est un point de E on note (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes dans le repère précédent.
On considère une droite D de E et un point M_0 n'appartenant pas à D.

1° Si D est la droite $D(A, \vec{u})$ où A a pour coordonnées $(2, 1, -1)$ et $\vec{u}$ a pour coordonnées $(1, 3, 1)$, et si M_0 est le point $(2, 5, 1)$, quelle est l'équation cartésienne du plan P contenant D et M_0.

2° Si D est la droite définie par
$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$
et M_0 le point $(1, -1, 1)$, quelle est l'équation cartésienne du plan P contenant D et M_0.
(Indication : D étant définie comme intersection de deux plans P_1 et P_2, un plan P contenant D est un plan du faisceau déterminé par P_1 et P_2 et a donc une équation de la forme
$$\alpha (x - 3y + 2z - 1) + \beta (2x + y - 3z + 1) = 0 \quad \text{où} \quad \alpha + \beta = 1.$$
On déterminera α et β en exprimant que P contient M_0.)

3.30 Soient E un espace affine associé au K-espace vectoriel V et $(M_0, \ldots, M_n)$ un repère affine de E.
1° On considère une fonction affine f sur E et $\forall i \in [0, n]$ on pose $f(M_i) = \beta_i$.
Montrer que si un point M de E a pour coordonnées barycentriques $(\alpha^0, \ldots, \alpha^n)$ dans le repère $(M_0, \ldots, M_n)$, on a
$$f(M) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i \beta_i.$$

2° En déduire que, si H est un hyperplan de E, il existe $n + 1$ scalaires $(\beta_0, \ldots, \beta_n)$ tels que H ait pour équation $\sum_{i=0}^{n} \alpha^i \beta_i = 0$.
Autrement dit H est l'ensemble des points M_n de coordonnées barycentriques $(\alpha^0, \ldots, \alpha^n)$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha^i \beta_i = 0$.
(Indication : on rappelle qu'étant donné un hyperplan H de E il existe au moins une fonction affine f sur H telle que $H = \{M \mid M \in E, f(M) = 0\}$.)

3° On suppose que $n = 2$.
On considère trois points P_0, P_1, P_2 de E et on note $(\alpha_i^0, \alpha_i^1, \alpha_i^2)$ les coordonnées de P_i dans le repère (M_0, M_1, M_2).
Montrer que P_0, P_1, P_2 sont alignés si et seulement si le déterminant
$$\begin{vmatrix} \alpha_0^0 & \alpha_0^1 & \alpha_0^2 \\ \alpha_1^0 & \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^0 & \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{vmatrix}$$
est nul.
(Indication : pour montrer que la condition est nécessaire on utilisera une équation de la droite D contenant P_0, P_1, P_2 et on montrera que les vecteurs colonnes de la matrice
$$\begin{pmatrix} \alpha_0^0 & \alpha_0^1 & \alpha_0^2 \\ \alpha_1^0 & \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^0 & \alpha_2^1 & \alpha_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{sont linéairement dépendants.}$$
Réciproquement, si le déterminant considéré est nul on sait que les vecteurs colonnes sont linéairement dépendants. On en déduira l'équation d'une droite contenant P_0, P_1, P_2.)

4° Application : **Théorème de Ménélaus.**

On suppose toujours que E est un espace affine de dimension 2 et on considère trois points non alignés A, B, C de E.

a) Montrer que (A, B, C) est un repère affine de E.

b) Soient A', B', C' trois points de E, distincts de A, B, C et appartenant respectivement aux droites (BC), (CA), (AB).
Montrer que, dans le repère (A, B, C), A' admet des coordonnées barycentriques proportionnelles à $0, \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}, -1$.

En déduire, par permutation circulaire, des triplets proportionnels aux coordonnées barycentriques de B′ et C′ et utiliser le résultat du 3° pour montrer que A′, B′, C′ sont alignés si et seulement si on a

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

3.31 Cet exercice utilise les résultats des questions 1° et 2° de l'exercice 3.30.
E désigne un espace affine de dimension 2.

1° Soit (M_0, M_1, M_2) un repère affine de E.
On considère trois droites D^0, D^1, D^2 de E et on suppose que D^i a pour équation

$$\alpha^0\beta_0^i + \alpha^1\beta_1^i + \alpha^2\beta_2^i = 0.$$

En raisonnant comme dans la question 3° de l'exercice 3.30, établir que les droites D^0, D^1, D^2 sont concourantes si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \beta_0^0 & \beta_1^0 & \beta_2^0 \\ \beta_0^1 & \beta_1^1 & \beta_2^1 \\ \beta_0^2 & \beta_1^2 & \beta_2^2 \end{vmatrix}$$

est nul.

2° Application : **Théorème de Céva.**
On considère trois points non alignés (A, B, C) de E.

a) Montrer que (A, B, C) est un repère affine de E.

b) Soient A′, B′, C′ trois points de E distincts de A, B, C et appartenant respectivement aux droites (BC), (CA), (AB).
Montrer que dans le repère (A, B, C) A′ admet des coordonnées barycentriques proportionnelles à $\left(0, \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}, -1\right)$. En déduire que, si l'on désigne par (α, β, γ) les coordonnées barycentriques d'un point de E dans le repère (A, B, C), une équation de la droite (AA′) est $\beta + \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\gamma = 0$.
Donner, par permutation circulaire, des équations des droites (BB′) et (CC′) et conclure, en utilisant le résultat du 1°, que les droites (AA′), (BB′), (CC′) sont concourantes si et seulement si on a

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

3.32 Convexes.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On dit qu'une partie C de E est convexe si tout barycentre d'éléments de C affectés de coefficients positifs appartient à C.

1° Montrer qu'une partie C de E est convexe si et seulement si pour tout couple (M, N) de points de C le segment [M, N] est contenu dans C.

2° Montrer que l'intersection d'une famille $(C_i)_{i \in I}$ de convexes de E est un convexe.

3° En déduire qu'étant donnée une partie A de E il existe un plus petit convexe, au sens de l'inclusion, contenant A; celui-ci est appelé enveloppe convexe de A.
Montrer que l'enveloppe convexe de A est l'ensemble ayant pour éléments les barycentres des points de A affectés de coefficients positifs.

4° Soit f une application de E dans un espace affine F associé à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'image par f d'un convexe de E est un convexe de F.

b) Montrer que l'image réciproque par f d'un convexe de F est un convexe de E.

c) En déduire que si A est une partie de E l'image par f de l'enveloppe convexe de A est l'enveloppe convexe de $f(A)$.

3.33 Demi-espaces.

1° Montrer que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

2° Dans un espace affine E associé à un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on appelle demi-espace ouvert (resp. fermé) toute image réciproque par une fonction affine d'un intervalle du type $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ (resp. $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$).
Il résulte de la question 4° *b)* de l'exercice 3.32 qu'un demi-espace ouvert (resp. fermé) est un convexe de E.

a) Soit H un hyperplan de E.
Si f est une fonction affine telle que $H = f^{-1}(\{0\})$ montrer que les demi-espaces ouverts (resp. fermés) $f^{-1}(]0, +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty, 0[)$ (resp. $f^{-1}([0, +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty, 0])$) ne dépendent que de H, autrement dit si g est une autre fonction affine telle que $H = g^{-1}(\{0\})$ les demi-espaces ouverts (resp. fermés) définis par g sont à l'ordre près les mêmes que ceux définis par f.
(Indication : on utilisera le résultat de la question 2° de l'exercice 3.8.)
Remarque : lorsque E est de dimension 2 on dit demi-plan au lieu de demi-espace.

b) Soient C un convexe de E et H un hyperplan de E.
Montrer que C est contenu dans un des demi-espaces ouverts déterminés par H si et seulement si on a $C \cap H = \varnothing$.

(Indication : si f est une fonction affine telle que $H = f^{-1}(\{0\})$ on établira que $C \cap H = \varnothing$ si et seulement si le convexe $f(C)$ de $\mathbb{R}$ ne contient pas O. Conclure en utilisant 1°.)

c) Soit (A_1, A_2, A_3) un triplet de points de E. Montrer que l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3\}$ est l'intersection des demi-espaces fermés contenant tous les points A_1, A_2, A_3.

3.34 Soit (A, B, C) un repère affine d'un plan affine réel P.
Si M est un point de P on note (α, β, γ) ses coordonnées barycentriques dans le repère (A, B, C).

1° Montrer que les ensembles P_A et P'_A définis par

$$P_A = \{M \mid M \in P, \alpha > 0\}$$
$$P'_A = \{M \mid M \in P, \alpha < 0\}$$

sont les deux demi-espaces ouverts associés à la droite (BC).
(Indication : on pourra, par exemple, utiliser la fonction affine f telle que

$$f(A) = 1, \quad f(B) = f(C) = 0.)$$

2° On considère toutes les parties de P obtenues en prenant l'intersection d'un demi-espace ouvert associé à (BC) et d'un demi-espace ouvert associé à (CA) et d'un demi-espace ouvert associé à (AB). On obtient ainsi 7 régions du plan P.
Montrer que chacune de ces régions est caractérisée par le triplet des signes des coordonnées barycentriques de ses points.

3.35 Conservation du contact par une application affine.

Soit E un espace affine associé à un espace vectoriel V de dimension n sur $\mathbb{R}$.
On considère une fonction vectorielle F de $\mathbb{R}$ dans V et l'application Φ de $\mathbb{R}$ dans E qui à t associe le point $M(t)$ tel que $\overrightarrow{OM}(t) = F(t)$, O étant un point fixé de E.
Si Γ désigne l'image de Φ, on a vu dans le tome II de ce cours que lorsque F est dérivable au point t_0 et admet en ce point une dérivée non nulle, la courbe Γ a pour tangente au point $M(t_0)$ la droite $D(M_0, F'(t_0))$.

1° Soit f une application affine de E dans lui-même et l l'application linéaire associée.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \text{on pose} \quad N(t) = f(M(t)).$$

Montrer que si $O' = f(O)$ on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \overrightarrow{O'N}(t) = l \circ F(t).$$

2° Établir que si F est dérivable au point t_0, $l \circ F$ l'est aussi, et que l'on a

$$(l \circ F)'(t_0) = l(F'(t_0)).$$

3° Supposons f injective et F dérivable, de dérivée non nulle, au point t_0.
Montrer que $f(\Gamma)$ admet une tangente au point N (t_0) et que celle-ci est l'image par f de la tangente à Γ au point M (t_0).

3.36 Une propriété caractéristique des applications affines.

Soient E et E' deux espaces affines associés aux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels V et V'.
On dit qu'une application f de E dans E' conserve l'alignement si l'image par f de toute droite de E est une droite ou un point de E'.
Par exemple, une application affine de E dans E' conserve l'alignement.
Nous nous proposons d'étudier la réciproque.
Considérons une application f de E dans E' conservant l'alignement et telle que $f(E)$ ne soit pas contenu dans une droite de E'.

1° Soient D et D_1 deux droites parallèles de E et $D' = f(D)$, $D_1' = f(D_1)$ leurs images.

a) Montrer que si D' est un point de E', D_1' est aussi un point de E' (on raisonnera par l'absurde en supposant que D_1' est une droite).

b) Montrer que si D' est une droite de E', D' et D_1' appartiennent à un même plan et sont parallèles.

2° Soit M un point de E.
Déduire de la question précédente que l'application l de V dans V' définie par

$$\forall \vec{u} \in V \qquad l(\vec{u}) = f(M + \vec{u}) - f(M)$$

ne dépend pas du point M considéré.

a) Montrer que $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in V \times V$ on a

$$l(\vec{u} + \vec{v}) = l(\vec{u}) + l(\vec{v}).$$

b) Montrer que, si $\vec{u} \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, les vecteurs $l(\alpha\vec{u})$ et $l(\vec{u})$ sont linéairement dépendants.
En déduire une application $\sigma_{\vec{u}}$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad l(\alpha\vec{u}) = \sigma_{\vec{u}}(\alpha)\, l(\vec{u}).$$

c) Montrer que $\sigma_{\vec{u}}$ ne dépend pas de $\vec{u}$.
(On établira d'abord que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs linéairement indépendants on a $\sigma_{\vec{u}} = \sigma_{\vec{v}}$).
On notera désormais σ les applications $\sigma_{\vec{u}}$.

d) Établir que

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \qquad \begin{array}{l} \sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta) \\ \sigma(\alpha\beta) = \sigma(\alpha)\,\sigma(\beta) \end{array},$$

ce que l'on exprime en disant que σ est un endomorphisme du corps $\mathbb{R}$.

e) Montrer que $\quad \sigma(0) = 0,\ \sigma(1) = 1 \quad$ et que $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma(n) = n.$
Établir ensuite que $\ \forall \alpha \in \mathbb{Q} \quad \sigma(\alpha) = \alpha.$
En utilisant la propriété que tout réel positif a une racine carrée, montrer que σ est une application croissante. En déduire que $\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \sigma(\alpha) = \alpha.$

3° Conclure que f est une application affine de E dans E'.

4| Espaces vectoriels euclidiens et applications orthogonales

Nous avons revu dans les chapitres précédents les structures d'espace vectoriel et d'espace affine et les applications respectivement compatibles avec ces structures, c'est-à-dire les applications linéaires et les applications affines.
Nous allons reprendre dans ce chapitre l'étude de la structure d'espace vectoriel euclidien, c'est-à-dire d'espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire.
Les applications compatibles avec cette structure sont appelées orthogonales : on est prêt à exiger d'elles qu'elles soient linéaires et qu'elles conservent le produit scalaire.
Il est remarquable que la seconde propriété entraîne la première.
Un soin particulier est apporté à l'étude des transformations orthogonales de $\mathcal{E}_n$ $(n = 1, 2, 3)$, c'est-à-dire des applications orthogonales de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathcal{E}_n$. Elles sont toujours bijectives, et leur réciproque est orthogonale.
Le chapitre s'achève par une classification de ces applications.

I. Espaces vectoriels euclidiens

Tous les résultats généraux démontrés dans la suite du cours sont vrais pour des espaces vectoriels euclidiens de dimension inférieure ou égale à 3. En réalité ils restent valables pour des espaces vectoriels euclidiens de dimension finie quelconque. De plus lorsque l'hypothèse « de dimension finie » ne figure pas dans l'énoncé d'un théorème, c'est qu'elle n'intervient pas dans la démonstration et par conséquent que le théorème est vrai pour un espace vectoriel euclidien de dimension quelconque.

4. 1 PRODUIT SCALAIRE

a) Définitions.

Définition.
Si $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on appelle **produit scalaire** sur $\mathcal{E}$ toute forme bilinéaire φ sur $\mathcal{E}$ telle que

(i) $\qquad \forall (x, y) \in \mathcal{E}^2 \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x),$

ce que l'on exprime en disant que φ est **symétrique.**

(ii) $\qquad \forall x \in \mathcal{E} \quad x \neq 0 \Longleftrightarrow \varphi(x, x) > 0,$

ce que l'on exprime en disant que φ est **définie positive.**

Remarquons tout de suite que la propriété (ii) implique :

$$\forall x \in \mathcal{E} \qquad \varphi(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Notation du produit scalaire :

Le réel $\varphi(x, y)$ est souvent noté $(x \mid y)$ ou $<x, y>$ ou $x \cdot y$.

EXEMPLES

1. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$.

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathcal{E}$, l'application

$$\varphi : \quad \mathcal{E}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un produit scalaire.

Plus généralement, si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un n-uplet de nombres positifs non tous nuls, l'application

$$\mathcal{E}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i$$

est un produit scalaire.

2. $\mathcal{E}$ est l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.

L'application φ de $\mathcal{E}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui, au couple (P, Q) de fonctions polynômes, associe $\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{Q}(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

De même, si $\mathrm{P}(x) = \sum_{p=1}^{n} a_p x^p$ et $\mathrm{Q}(x) = \sum_{p=1}^{n} b_p x^p$, l'application ψ de $\mathcal{E}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\psi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sum_{p=1}^{n} a_p b_p$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

EXERCICES

1. Trouver tous les produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$, $n = 2$, $n = 3$.
2. Si φ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$. Lorsque $\dim \mathcal{E} > 1$, montrer qu'il existe sur $\mathcal{E}$ une infinité de produits scalaires qui ne sont pas de la forme $\lambda\varphi$.

Définition.

On appelle **espace vectoriel euclidien** tout espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire φ.

Nous le noterons soit $(\mathcal{E}, \varphi)$ soit $\mathcal{E}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

b) Norme associée à un produit scalaire.

On a démontré en Première le résultat suivant dont nous laissons le soin au lecteur de retrouver la démonstration.

Théorème.

Soit $(\mathcal{E}, \varphi)$ un espace vectoriel euclidien. L'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui au vecteur x associe le réel positif $\sqrt{\varphi(x, x)}$, noté $\|x\|$, a les propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in \mathcal{E} \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{E} \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

(iii) $\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2 \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

On dit que $\|x\|$ est la **norme euclidienne** du vecteur x. Lorsque $\|x\| = 1$ on dit que x est un vecteur **unitaire**.

REMARQUE

Le mot « norme » vient de ce que l'on appelle ainsi toute application N d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui a les propriétés :

(i) $\forall x \in \mathrm{E} \quad \mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0$

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathrm{E} \quad \mathrm{N}(\alpha x) = |\alpha|\,\mathrm{N}(x)$

(iii) $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \quad \mathrm{N}(x + y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$.

Le théorème précédent nous dit que si φ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$, l'application $x \longmapsto \sqrt{\varphi(x, x)}$ est une norme sur $\mathcal{E}$, et $\mathcal{E}$ étant muni de sa structure euclidienne définie par φ, cette norme particulière, dérivant de φ, est appelée norme euclidienne.

EXERCICE

3. Soient $(\mathcal{E}_i, \varphi_i)_{i \in \{1, \ldots, p\}}$ des espaces vectoriels euclidiens. On note $\mathcal{E}$ le produit cartésien $\mathcal{E}_1 \times \ldots \times \mathcal{E}_p$. Montrer que l'application

$$\varphi : \quad \mathcal{E}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

si $\quad x = (x_1, \ldots, x_p) \quad$ et $\quad y = (y_1, \ldots, y_p)$

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x_i, y_i)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

Exprimer la norme associée à φ en fonction des normes associées aux φ_i.

Théorème.

Soit $(\mathcal{E}, \varphi)$ un espace vectoriel euclidien et $x \longmapsto \|x\|$ la norme euclidienne associée à φ. On a :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2 \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\varphi(x, y) + \|y\|^2$$
$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\varphi(x, y) + \|y\|^2$$
$$\|x\|^2 - \|y\|^2 = \varphi(x + y, x - y).$$

EXERCICES

4. Démontrer le résultat qui vient d'être énoncé.
5. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2 \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

6. Montrer que si

$$(x, y, z) \in \mathcal{E}$$

on a

$$\|x + y + z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 + 2\varphi(x, y) + 2\varphi(x, z) + 2\varphi(y, z).$$

REMARQUE

Toutes les normes, sur un espace vectoriel, ne dérivent pas d'un produit scalaire. Par exemple, dans $\mathbb{R}^n$, l'application N qui, à $x = (x_1, \ldots, x_n)$ associe $\sup_{i \in \{1, \ldots, n\}} |x_i|$ est une norme et le lecteur pourra vérifier que, cependant, l'application

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{2}[\mathrm{N}(x + y)^2 - \mathrm{N}(x)^2 - \mathrm{N}(y)^2]$$

n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

On a, entre le produit scalaire φ et la norme euclidienne associée, la relation suivante, appelée **inégalité de Schwartz :**

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2 \qquad |\varphi(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|}$$

l'égalité n'ayant lieu que si les vecteurs x et y sont linéairement dépendants.

Pour démontrer cette inégalité, considérons le trinôme

$$P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2 = \lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda\, \varphi(x, y) + \|x\|^2.$$

$P(\lambda)$ étant toujours positif ou nul son discriminant est négatif ou nul, autrement dit on a

$$\varphi(x, y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0$$

ce qui s'écrit encore

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \|x\| . \|y\|.$$

Son discriminant étant toujours négatif ou nul, le trinôme $P(\lambda)$ s'annule si et seulement si ce discriminant est nul. Or, dire que $P(\lambda)$ s'annule, signifie qu'il existe un réel λ tel que $x + \lambda y = 0$, donc que x et y sont linéairement dépendants. En conclusion on a :

$$|\varphi(x, y)| = \|x\| . \|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont linéairement dépendants.}$$

c) Métrique euclidienne.

Définition.

On appelle **distance** sur un ensemble E toute application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que

(i) $\forall (x, y) \in E \times E \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y$

(ii) $\forall (x, y) \in E \times E \qquad d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E \qquad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$

La condition (iii) est souvent appelée *inégalité triangulaire*. Un ensemble muni d'une distance est appelé un **espace métrique.**

Théorème et définition.

Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien et $x \longmapsto \|x\|$ la norme euclidienne de $\mathcal{E}$. L'application d de $\mathcal{E}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2 \qquad d(x, y) = \|x - y\|$$

est une distance sur $\mathcal{E}$.

Cette distance, associée à la norme euclidienne, est appelée **distance** (ou **métrique**) **euclidienne** de $\mathcal{E}$.

EXERCICE

7. Montrer, plus généralement, que si N est une norme sur un espace vectoriel E, l'application

$$\begin{aligned} E^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto N(x - y) \end{aligned}$$

est une distance sur E.

EXEMPLE

Considérons l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 muni du produit scalaire

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt.$$

Nous nous proposons de déterminer $d(P, Q)$ lorsque

$$P(t) = 1 + t + 2t^2$$
$$Q(t) = -t + t^2.$$

On a $\qquad (P - Q)(t) = 1 + 2t + t^2 = (1 + t)^2$

et

$$\|P - Q\|^2 = \int_0^1 (1 + t)^4\, dt = \int_1^2 u^4\, du = \left[\frac{u^5}{5}\right]_1^2 = \frac{31}{25}$$

d'où $\qquad d(P, Q) = \dfrac{\sqrt{31}}{5}$

EXERCICE

8. Reprendre l'exemple précédent en utilisant le produit scalaire ψ défini dans l'exemple 2 de *a*).

4. 2 ORTHOGONALITÉ

a) Vecteurs orthogonaux.

Définition.

Soit $(\mathcal{E}, \varphi)$ un espace vectoriel euclidien. On dit que deux vecteurs x, y de $\mathcal{E}$ sont **orthogonaux** si $\varphi(x, y) = 0$.

EXERCICE

1. Établir le théorème de PYTHAGORE :
deux vecteurs x, y de $\mathcal{E}$ sont orthogonaux et si seulement si on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Plus généralement, nous dirons :

Définition.

Deux parties A et B d'un espace vectoriel euclidien $(\mathcal{E}, \varphi)$ sont dites **orthogonales** si tout élément de l'une est orthogonal à tout élément de l'autre.

Si x est un vecteur de $\mathcal{E}$ et A une partie de $\mathcal{E}$, nous dirons que x est orthogonal à A lorsque les parties $\{x\}$ et A sont orthogonales. Dans ce cas, tout élément de l'espace vectoriel engendré par A étant combinaison linéaire d'éléments de A est aussi orthogonal à x, ce qui s'énonce :

Théorème.

Si dans un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$ un vecteur x est orthogonal à une partie A de $\mathcal{E}$, x est orthogonal au sous-espace vectoriel engendré par A.

En appliquant ce résultat à tous les vecteurs de deux parties orthogonales A et B de $\mathcal{E}$ nous pouvons conclure :

Corollaire.

Si A et B sont deux parties orthogonales d'un espace vectoriel euclidien, les sous-espaces vectoriels qu'elles engendrent sont orthogonaux.

En particulier :

Deux droites vectorielles sont orthogonales si et seulement si un vecteur non nul de l'une est orthogonal à un vecteur non nul de l'autre.

et

Une droite vectorielle et un plan vectoriel sont orthogonaux si et seulement si un vecteur non nul de la droite est orthogonal à deux vecteurs linéairement indépendants du plan.

Propriétés des sous-espaces vectoriels orthogonaux.

Théorème.
Si $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux d'un espace euclidien $\mathcal{E}$, la somme $\mathcal{E}' + \mathcal{E}''$ est directe.

Nous avons à démontrer que $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'' = \{0\}$.
Considérons alors un élément x de $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}''$. Comme tout élément de $\mathcal{E}'$ est orthogonal à tout élément de $\mathcal{E}''$, x est en particulier orthogonal à lui-même. On a donc $\varphi(x, x) = 0$ ce qui implique $x = 0$.
Il en résulte, en particulier, que dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3 une condition nécessaire pour que deux sous-espaces vectoriels soient orthogonaux est que la somme de leurs dimensions soit inférieure ou égale à 3. Par suite deux plans vectoriels ne peuvent être orthogonaux. Nous dirons cependant, dans ce cas, et c'est un abus de langage, que *deux plans vectoriels sont orthogonaux lorsqu'ils ont des supplémentaires orthogonaux* au sens défini précédemment.

EXERCICE

2. Étant donnés deux plans vectoriels P, P′ d'un espace vectoriel euclidien de dimension 3, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) P et P′ sont orthogonaux.
(ii) P′ contient une droite vectorielle orthogonale à P.

Orthogonal d'une partie :

Définition.
Si A est une partie d'un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$, on appelle **orthogonal de** A la partie, notée $A^\perp$, ayant pour éléments tous les vecteurs orthogonaux à A.

Les sous-espaces vectoriels engendrés par A et $A^\perp$ sont alors orthogonaux et comme, par définition, $A^\perp$ est le plus grand sous-ensemble de $\mathcal{E}$ orthogonal à A, il en résulte qu'il est lui-même le sous-espace vectoriel qu'il engendre et donc que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.
Nous avons donc montré :

Théorème.
Si A est une partie d'un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$, l'orthogonal $A^\perp$ de A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

EXERCICES

3. Montrer que $A \subset A^{\perp\perp}$.
4. Montrer que si $A \subset B$ on a $B^\perp \subset A^\perp$.
5. Déduire de ces deux résultats que $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$ et que lorsque $\mathcal{E}$ est de dimension finie $A^{\perp\perp}$ est le sous-espace vectoriel engendré par A.

Cas particulier : orthogonal d'un vecteur.

Théorème.
Si x est un vecteur non nul d'un espace euclidien $(\mathcal{E}, \varphi)$ l'orthogonal de $\{x\}$ (appelé, par abus de langage, orthogonal de x) est un hyperplan vectoriel de $\mathcal{E}$.

Notons H l'orthogonal de x.
On a donc :

$$H = \{y \mid y \in \mathcal{E} \quad , \quad \varphi(x, y) = 0\},$$

autrement dit H est le noyau de la forme linéaire, définie sur $\mathcal{E}$, qui à y associe $\varphi(x, y)$
Cette forme linéaire n'étant pas nulle (puisque $\varphi(x, x) \neq 0$), son noyau est un hyperplan vectoriel de $\mathcal{E}$ (cf. § 1.16).

b) Familles orthogonales.

Définition.
Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un espace vectoriel euclidien $(\mathcal{E}, \varphi)$ est dite **orthogonale** si, pour tout couple d'indices distincts (i, j), on a

$$\varphi(x_i, x_j) = 0.$$

Si de plus, pour tout indice i, on a $\| x_i \| = 1$, on dit que la famille est **orthonormée.**

REMARQUE

Si la famille $(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale, et si $\forall i \in I \quad x_i \neq 0$, la famille $\left(\dfrac{x_i}{\|x_i\|}\right)_{i \in I}$ est orthonormée.

Théorème.
Une famille orthogonale $(x_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{E}$ est libre si et seulement si, pour tout indice i, x_i est non nul.

S'il existe un indice i tel que $x_i = 0$ la famille considérée n'est évidemment pas libre.
Supposons alors que $\forall\, i \in I \quad x_i \neq 0$, et que l'on ait une relation

$$\sum_{i \in I} \alpha^i x_i = 0 \quad \text{où} \quad (\alpha^i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{(I)}.$$

Si $j \in I$, on a alors
$$\varphi\left(x_j, \sum_{i \in I} \alpha^i x_i\right) = 0$$

d'où
$$\sum_{i \in I} \alpha^i \varphi(x_j, x_i) = 0 \quad ,$$

et, puisque $\varphi(x_j, x_i) = 0$ lorsque $j \neq i$,
$$\alpha^j \varphi(x_j, x_j) = 0.$$

Comme, par hypothèse on a $x_j \neq 0$, on a aussi $\varphi(x_j, x_j) \neq 0$ et donc

$$\alpha^j = 0.$$

Ceci étant réalisé pour tout indice j, on en déduit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

c) Bases orthogonales; bases orthonormées.

Définition.

Dans un espace euclidien $\mathcal{E}$, on dit qu'une base $(e_i)_{i \in I}$ est **orthogonale** (resp. **orthonormée**) si la famille $(e_i)_{i \in I}$ est orthogonale (resp. orthonormée).

Alors, si $(e_i)_{i \in I}$ est une base orthogonale de $\mathcal{E}$, $\forall i \in I$ $e_i \neq 0$ et la famille $\left(\frac{e_i}{\|e_i\|}\right)_{i \in I}$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}$.

On a démontré en Première qu'un espace vectoriel euclidien de dimension n ($n \leqslant 3$) a toujours des bases orthonormées; nous allons préciser ce résultat et démontrer que :

Théorème.

Dans un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$ **de dimension finie** n on peut compléter toute famille orthonormée pour obtenir une base orthonormée.

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur n.

• Si $n = 1$, toute famille orthonormée a un seul élément qui est un vecteur unitaire de $\mathcal{E}$ et en constitue une base orthonormée.

• Supposons $n > 1$ et le résultat vrai pour les espaces vectoriels euclidiens de dimension $n - 1$.

Soit $(x_1 \ldots, x_p)$ une famille orthonormée de $\mathcal{E}$; elle est libre, et, comme le cardinal de toute famille libre de $\mathcal{E}$ est inférieur ou égal à n (cf. § 1.10), on a $p \leqslant n$.

Nous savons que l'orthogonal H de x_1 est un hyperplan vectoriel de $\mathcal{E}$, donc est un espace vectoriel euclidien de dimension $n - 1$. Comme H contient évidemment $x_2, \ldots, x_p$ la famille $(x_2, \ldots, x_p)$ est une famille orthonormée de H, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe des vecteurs $x_{p+1}, \ldots, x_n$ de H tels que $(x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ soit une base orthonormée de H.

Il est alors immédiat que $(x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}$ et le théorème est ainsi démontré.

EXERCICE

6. *Procédé d'orthogonalisation de Schmidt.*
Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque de $\mathcal{E}$.
(i) Montrer qu'il existe un vecteur x_2 de la forme $e_2 - \alpha^1 e_1$, non nul et orthogonal au vecteur $x_1 = e_1$.
(ii) Montrer de même, qu'il existe un vecteur x_3 de la forme $e_3 - \alpha^2 x_2 - \alpha^1 x_1$, non nul et orthogonal à x_1 et x_2.
En itérant ce procédé, montrer que si $1 < p \leqslant n$, on peut trouver un vecteur x_p, de la forme $e_p - \alpha^{p-1} x_{p-1} - \ldots - \alpha^1 x_1$, non nul et orthogonal au sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_{p-1}$.
(iii) Conclure que la famille $\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}$.

Corollaire et définition.

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$, l'orthogonal $F^\perp$ est un sous-espace supplémentaire de F.
On dit que $F^\perp$ est **le supplémentaire orthogonal** de F.

En effet, soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F; on sait qu'il existe des vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ tels que $(e_1, \ldots, e_p, \ldots e_n)$ soit une base orthonormée de $\mathcal{E}$.
Comme $e_{p+1}, \ldots e_n$ sont alors des éléments de $F^\perp$, il en résulte que

$$F + F^\perp = \mathcal{E}.$$

Or, nous savons déjà que la somme $F + F^\perp$ est directe; par suite F et $F^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
Lorsque $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}$ tels que $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}'^\perp$ (ou, ce qui est équivalent, $\mathcal{E}' = \mathcal{E}''^\perp$), on dit que $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ sont *des supplémentaires orthogonaux.*

EXERCICE

7. Si $B_1 = \{e_1, \ldots, e_p\}$ est une base orthonormée de F et $B_2 = \{f_1, \ldots, f_q\}$ est une base orthonormée de $F^\perp$, montrer que $B_1 \cup B_2$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}$.

REMARQUE

Si p est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$, on dit que p est *la projection orthogonale sur* F. Si s est la symétrie par rapport à F de direction $F^\perp$, on dit que s est *la symétrie orthogonale par rapport à* F.

d) Coordonnées dans une base orthonormée.

Théorème.

Soient $(\mathcal{E}, \varphi)$ un espace vectoriel euclidien et $(e_i)_{i \in I}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$. Alors, si x est un vecteur de $\mathcal{E}$, la coordonnée d'indice i de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$ est $\varphi(x, e_i)$.

En effet, si $x = \sum_{j \in I} \alpha^j e_j$, on a

$$\varphi(x, e_i) = \varphi\left(\sum_{j \in I} \alpha^j e_j, e_i\right) = \sum_{j \in I} \alpha^j \varphi(e_j, e_i) = \alpha^i.$$

Nous allons, maintenant, donner l'expression du produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs coordonnées dans une base orthonormée.

Théorème.

Soit $(\mathcal{E}, \varphi)$ un espace vectoriel euclidien. Si x et y sont deux vecteurs de $\mathcal{E}$ ayant pour coordonnées respectives $(\alpha^i)_{i \in I}$ et $(\beta^i)_{i \in I}$ dans une base orthonormée $(e_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{E}$, on a

$$\varphi(x, y) = \sum_{i \in I} \alpha^i \beta^i.$$

En effet, $$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i \in I} \alpha^i e_i, \sum_{j \in I} \beta^j e_j\right)$$
$$= \sum_{i \in I} \alpha^i \varphi\left(e_i, \sum_{j \in I} \beta^j e_j\right)$$
$$= \sum_{i \in I} \alpha^i \beta^i.$$

En particulier on en déduit : $$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} (\alpha^i)^2.$$

4. 3 APPLICATIONS ORTHOGONALES

Considérons deux espaces vectoriels euclidiens $(\mathcal{E}, \varphi)$ et $(\mathcal{E}', \varphi')$ et une application l de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.

On notera $x \longmapsto \|x\|$ la norme associée à φ, et $x' \longmapsto |||x'|||$ la norme associée à φ'.

Nous nous proposons de chercher quelles conditions il est naturel d'imposer à l pour qu'elle soit compatible avec les structures euclidiennes de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$.

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ étant des espaces vectoriels il est normal de demander à l d'être linéaire.

Aux structures vectorielles de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$ s'ajoute la donnée des produits scalaires φ, φ'; on peut alors envisager comme condition de compatibilité que l « conserve le produit scalaire », autrement dit que l'on ait :
$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2 \quad \varphi'(l(x), l(y)) = \varphi(x, y).$$

C'est à ces applications particulières que nous allons nous intéresser maintenant.

Le théorème suivant va montrer qu'il est superflu de demander à l d'être linéaire et que la conservation du produit scalaire implique cette linéarité.

Théorème.

Soient $(\mathcal{E}, \varphi)$ et $(\mathcal{E}', \varphi')$ deux espaces vectoriels euclidiens et l une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2 \quad \varphi'(l(x), l(y)) = \varphi(x, y)$.

(ii) l est linéaire et transforme toute base orthonormée de $\mathcal{E}$ en une famille orthonormée de $\mathcal{E}'$.

(iii) l est linéaire et il existe une base orthonormée de $\mathcal{E}$ dont l'image est une famille orthonormée de $\mathcal{E}'$.

(iv) l est linéaire et $\forall x \in \mathcal{E} \quad |||l(x)||| = \|x\|$.

Nous allons établir successivement les implications
$$\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}, \quad \text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)}, \quad \text{(iii)} \Longrightarrow \text{(iv)}, \quad \text{(iv)} \Longrightarrow \text{(i)}.$$

• (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$. La famille $(l(e_i))_{i \in I}$ est orthonormée puisque
$$\forall (i, j) \in I \times I \quad \varphi'(l(e_i), l(e_j)) = \varphi(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Montrons que l est linéaire.

Considérons deux vecteurs x, y de $\mathcal{E}$ et un réel α; on a, en posant $z = x + y$,
$$\begin{aligned} |||l(x+y) - l(x) - l(y)|||^2 &= |||l(x+y)|||^2 + |||l(x)|||^2 + |||l(y)|||^2 - \\ &\quad 2\varphi'(l(x), l(y)) - 2\varphi'(l(x), l(z)) - 2\varphi'(l(y), l(z)) \\ &= \|x+y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\varphi(x, y) - \\ &\quad 2\varphi(x, z) - 2\varphi(y, z) \\ &= \|(x+y) - x - y\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $$l(x+y) = l(x) + l(y).$$

De même
$$\begin{aligned} |||l(\alpha x) - \alpha l(x)|||^2 &= |||l(\alpha x)|||^2 - 2\varphi'(l(\alpha x), \alpha l(x)) + |||\alpha l(x)|||^2 \\ &= \|\alpha x\|^2 - 2\alpha\varphi'(l(\alpha x), x) + \|\alpha x\|^2 \\ &= \|\alpha x\|^2 - 2\alpha\varphi(\alpha x, x) + \|\alpha x\|^2 \\ &= 2\|\alpha x\|^2 - 2\varphi(\alpha x, \alpha x) = 0 \end{aligned}$$

d'où $$l(\alpha x) = \alpha l(x).$$

• (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Immédiat.

• (iii) $\Longrightarrow$ (iv).

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$ dont l'image $(l(e_i))_{i \in I}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{E}'$.

Si $$x = \sum_{i \in I} \alpha^i e_i.$$

on a $$l(x) = \sum_{i \in I} \alpha^i l(e_i);$$

or $$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} (\alpha^i)^2$$

et, puisque la famille $(l(e_i))_{i \in I}$ est orthonormée,
$$|||l(x)|||^2 = \sum_{i \in I} (\alpha^i)^2.$$

On en déduit $|||l(x)|||^2 = \|x\|^2$, c'est-à-dire $|||l(x)||| = \|x\|$.

• (iv) $\Longrightarrow$ (i).

Soient x et y deux vecteurs de $\mathcal{E}$.

On a $$\varphi'(l(x), l(y)) = \frac{1}{2}[|||l(x) + l(y)|||^2 - |||l(x)|||^2 - |||l(y)|||^2]$$

or $$|||l(x)||| = \|x\| \quad , \quad |||l(y)||| = \|y\|$$

et $$|||l(x) + l(y)||| = |||l(x+y)||| = \|x+y\|,$$

on en déduit $$\varphi'(l(x), l(y)) = \frac{1}{2}[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2] = \varphi(x, y).$$

Définition.

Soient $(\mathcal{E}, \varphi)$ et $(\mathcal{E}', \varphi')$ deux espaces vectoriels euclidiens. Une application l de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ vérifiant les conditions équivalentes du théorème précédent est appelée **application orthogonale.**

EXERCICES

1. Soient $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 muni du produit scalaire

$$\varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ Q(x) = b_0 + b_1 x + b^2 x^2 \end{array}$$

et $\mathcal{E}'$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $x \longmapsto 1$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \cos 2x$, muni du produit scalaire

$$\varphi'(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt.$$

Montrer que l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, qui à $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ associe la fonction $x \longmapsto a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x$, est une application orthogonale.

2. *Détermination d'une application orthogonale.*
Soient $(\mathcal{E}, \varphi)$ et $(\mathcal{E}', \varphi')$ deux espaces vectoriels euclidiens et $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$. Montrer que, pour toute famille orthonormée $(x'_1, \dots, x'_n)$ de $\mathcal{E}'$ il existe une application orthogonale et une seule l de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \qquad l(e_i) = x'_i.$$

Soient $(\mathcal{E}, \varphi)$, $(\mathcal{E}', \varphi')$, $(\mathcal{E}'', \varphi'')$ trois espaces vectoriels euclidiens, l une application orthogonale de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ et h une application orthogonale de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}''$.

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2 \qquad \varphi''(h \circ l(x), h \circ l(y)) = \varphi'((l(x), l(y)) = \varphi(x, y),$$

d'où

Théorème.

La composée de deux applications orthogonales est une application orthogonale.

Les applications orthogonales ont la propriété de « conserver l'orthogonalité », c'est-à-dire :

Théorème.

Soit l une application orthogonale d'un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$ dans un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}'$. Si A et B sont deux parties orthogonales de $\mathcal{E}$, leurs images $l(A)$ et $l(B)$ sont deux parties orthogonales de $\mathcal{E}'$.

En effet, si $x \in A$ et $y \in B$ on a $\varphi(x, y) = 0$,
d'où $\varphi'(l(x), l(y)) = 0$

et, par suite, tout élément de $l(A)$ est orthogonal à tout élément de $l(B)$.

4. 4 ISOMORPHISMES D'ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

Définition.

Soient $(\mathcal{E}, \varphi)$ et $(\mathcal{E}', \varphi')$ deux espaces vectoriels euclidiens. On dit qu'une application orthogonale l de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ est un **isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens** s'il existe une application orthogonale de h de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$ telle que

$$h \circ l = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad l \circ h = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}'}.$$

Nous allons démontrer :

Théorème.

Soient $(\mathcal{E}, \varphi)$ et $(\mathcal{E}', \varphi')$ deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions finies et l une application orthogonale de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l est un isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens.
(ii) l est bijective.
(iii) $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ ont même dimension.

• (i) $\Longrightarrow$ (ii).
Immédiat.

• (ii) $\Longrightarrow$ (iii).
Car l est alors un isomorphisme d'espaces vectoriels (cf. § 1.13).

• (iii) $\Longrightarrow$ (i).
Soit $(e_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}$.
On sait que la famille $(l(e_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est orthonormée; c'est donc une famille libre de $\mathcal{E}'$ ayant n éléments, et comme $n = \dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}'$, elle constitue une base orthonormée de $\mathcal{E}'$.
Notons h l'application linéaire de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$ telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \qquad h[l(e_i)] = e_i.$$

L'application h est alors orthogonale (elle est linéaire et il existe une base orthonormée de $\mathcal{E}'$ dont l'image est une famille orthonormée de $\mathcal{E}$) et on a bien

$$h \circ l = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \quad , \quad l \circ h = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}'}.$$

Corollaire.

Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions finies. Si l est une application orthogonale de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, l est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $l(\mathcal{E})$ et $\dim \mathcal{E} \leqslant \dim \mathcal{E}'$.

En effet, l est injective car :

$$\forall x \in \mathcal{E} \qquad l(x) = 0 \Longrightarrow |||\, l(x)\, ||| = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Par suite l est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $l(\mathcal{E})$, donc est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $l(\mathcal{E})$ qui ont alors même dimension.

On a donc $\qquad \dim \mathcal{E} = \dim l(\mathcal{E}) \leqslant \dim \mathcal{E}'.$

4. 5 GROUPE ORTHOGONAL

Il résulte du paragraphe précédent que, si $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel euclidien de dimension finie, toute application orthogonale de $\mathcal{E}$ dans lui-même est un isomorphisme et que l'ensemble des applications orthogonales de $\mathcal{E}$ dans lui-même constitue un sous-groupe de $GL(\mathcal{E})$.

Définitions.

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie. On appelle **transformation orthogonale** de $\mathcal{E}$ toute application orthogonale de $\mathcal{E}$ dans lui-même.
L'ensemble des transformations orthogonales de $\mathcal{E}$ est, pour la composition des applications, un groupe appelé **groupe orthogonal** de $\mathcal{E}$ et noté $O(\mathcal{E})$.

EXERCICE

1. Montrer que O (ℰ) opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des bases orthonormées de ℰ, i.e. quelles que soient les bases orthonormées $(e_i)_{i\in I}$, $(e'_i)_{i\in I}$ de ℰ établir qu'il existe une et une seule transformation orthogonale l de ℰ telle que $\forall i \in I \quad e'_i = l(e_i)$.

Si l est une transformation orthogonale de ℰ, on a, en désignant par d la métrique euclidienne de ℰ,

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2 \qquad d(l(x), l(y)) = \| l(x) - l(y) \| = \| l(x - y) \| = \| x - y \| = d(x, y),$$

donc l conserve les distances.

Théorème.

Soient (ℰ, φ) un espace vectoriel euclidien de dimension finie et l une transformation orthogonale de ℰ. Si F, sous-espace vectoriel de ℰ, est une partie stable de l (i.e. $l(F) \subset F$) l'orthogonal $F^\perp$ de F est aussi une partie stable de l et les restrictions $l|_F$ $l|_{F^\perp}$, de l à F et $F^\perp$ appartiennent respectivement à O(F) et O($F^\perp$).

La restriction à F de l est évidemment un élément de O (F) puisque $l(F) \subset F$ et que

$$\forall (x, y) \in F^2 \qquad \varphi(l(x), l(y)) = \varphi(x, y).$$

Pour montrer que $F^\perp$ est une partie stable de l nous devons vérifier que $\forall y \in F^\perp$ $l(y)$ est orthogonal à F.

Comme $l|_F$ est une bijection de F sur l (F) il est équivalent de montrer que

$$\forall x \in F \qquad \varphi(l(y), l(x)) = 0.$$

Or $\varphi(l(y), l(x)) = \varphi(y, x) = 0$ puisque $y \in F^\perp$ et $x \in F$; par suite $F^\perp$ est une partie stable de l et on a donc $l|_{F^\perp} \in O(F^\perp)$.

EXERCICE

2. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien ℰ. Si l_1 et l_2 sont des éléments de O (F) et de O ($F^\perp$) respectivement, montrer qu'il existe un unique endomorphisme l de l'espace vectoriel ℰ dont la restriction à F soit l_1 et la restriction à $F^\perp$ soit l_2. Établir que l est un élément de O (ℰ).

4. 6 MATRICES ORTHOGONALES

a) Matrice d'une transformation orthogonale.

Soient (ℰ, φ) un espace vectoriel euclidien de dimension n, et $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, $(e'_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$ deux bases orthonormées de ℰ.

Considérons une application linéaire l de ℰ dans lui-même et sa matrice A dans les bases $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ et $(e'_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

où $(\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n)$ sont les coordonnées de $l(e_i)$ dans la base orthonormée $(e'_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$.

D'après le paragraphe 3 de ce chapitre, l est une transformation orthogonale de ℰ si et seulement si la famille $(l(e_i))_{i\in\{1,\dots,n\}}$ est orthonormée, donc, en utilisant les coordonnées des vecteurs $l(e_i)$ dans la base orthonormée $(e'_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$, si et seulement si on a les relations :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \qquad \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i^j)^2 = 1$$

$$\begin{matrix}\forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \forall j \in \{1, \dots, n\}\end{matrix} \qquad i \neq j \implies \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k \alpha_j^k = 0.$$

b) Transposée d'une matrice.

Définition.

Si A est une matrice carrée d'ordre n, on appelle **transposée** de A, et on note ${}^tA$, la matrice ayant pour $i^{ième}$ ligne la $i^{ième}$ colonne de A, et ceci pour tout élément i de $\{1, \dots, n\}$.

Autrement dit, si
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_i^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_i^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_i^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix},$$

on a
$${}^tA = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_i^1 & \alpha_i^2 & \cdots & \alpha_i^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

ou encore, si α_i^j (resp. β_i^j) désigne l'élément de la $i^{ième}$ colonne et de la $j^{ième}$ ligne de A (resp. ${}^tA$), on a : $\beta_i^j = \alpha_j^i$.

EXERCICES

1. Montrer que, si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, on a :
$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$
et
$${}^t(AB) = {}^tB \,.\, {}^tA.$$

2. On dit qu'une matrice carrée A d'ordre n est *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si ${}^tA = A$ (resp. ${}^tA = -A$). Montrer que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_{n,n}$ (K) sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_{n,n}$ (K).
Quelles sont leurs dimensions respectives?

c) Matrices orthogonales.

Théorème.

Une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels, est la matrice d'une transformation orthogonale d'un espace vectoriel euclidien ℰ de dimension n, relativement à deux bases orthonormées de ℰ, si et seulement si

$${}^tA.A = A.{}^tA = I,$$

en désignant par I la matrice unité d'ordre n.

En effet, si $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \ldots\ldots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \ldots\ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$ on a ${}^tA = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \ldots\ldots & \alpha_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & \ldots\ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$

et on a vu au *a*) que A est la matrice d'une transformation orthogonale de $\mathcal{E}$, relativement à deux bases orthonormées, si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_i^j)^2 = 1 \quad \text{pour tout } i \text{ de } \{1, \ldots, n\}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k \alpha_j^k = 0 \quad \text{pour tout couple } (i, j) \text{ d'indices distincts.}$$

Or l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne du produit ${}^tA.A$ est $\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k \alpha_j^k$, et les relations précédentes sont donc équivalentes à ${}^tA.A = I$. La matrice A étant alors inversible (puisqu'une transformation orthogonale est bijective), on a $A^{-1} = {}^tA$ et donc

$$A.{}^tA = I.$$

Définition.

On dit qu'une matrice carrée A, à coefficients réels, est **orthogonale** si ${}^tA.A = A.{}^tA = I$, autrement dit si A est inversible et si $A^{-1} = {}^tA$.

EXEMPLE

Si $(e_i)_{i\in I}$ et $(e'_i)_{i\in I}$ sont deux bases orthonormées d'un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$ de dimension *n*, la matrice de passage P de $(e_i)_{i\in I}$ à $(e'_i)_{i\in I}$ est orthogonale : P est la matrice de $Id_{\mathcal{E}}$ relativement aux bases $(e_i)_{i\in I}$ et $(e'_i)_{i\in I}$, et $Id_{\mathcal{E}}$ est évidemment une transformation orthogonale de $\mathcal{E}$.

d) Déterminant d'une matrice orthogonale.

• $n = 2$.

Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

On a

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{vmatrix} = \alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^1$$

et

$$\det {}^tA = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{vmatrix} = \alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_2^1 \alpha_1^2,$$

d'où

$$\det {}^tA = \det A.$$

• $n = 3$.

Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

On a

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} = \alpha_1^1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 + \alpha_1^3 \alpha_2^1 \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1 - \alpha_1^3 \alpha_2^2 \alpha_3^1 - \alpha_1^2 \alpha_2^1 \alpha_3^3 - \alpha_1^1 \alpha_2^3 \alpha_3^2$$

et

$$\det {}^tA = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} = \alpha_1^1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^1 + \alpha_1^3 \alpha_2^1 \alpha_3^2 - \alpha_1^3 \alpha_2^2 \alpha_3^1 - \alpha_1^1 \alpha_2^3 \alpha_3^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^1 \alpha_3^3$$

d'où

$$\det {}^tA = \det A.$$

On peut donc énoncer :

Théorème.

Si A est une matrice carrée d'ordre *n* ($n = 2$ ou 3) on a

$$\det {}^tA = \det A.$$

Par suite, si A est orthogonale, on obtient :

$$\det({}^tA.A) = \det I = 1$$

d'où

$$\det {}^tA.\det A = 1$$

et

$$(\det A)^2 = 1.$$

Corollaire.

Si A est une matrice carrée orthogonale on a

$$\det A = \pm 1.$$

EXERCICE

3. Soient B et B′ deux bases orthonormées ordonnées d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie $(\mathcal{E}, \varphi)$. Montrer, en utilisant la matrice de $Id_{\mathcal{E}}$ dans les bases B et B′, que $\det_B(B') = \pm 1$.

II Transformations orthogonales

4. 7 SYMÉTRIES ORTHOGONALES VECTORIELLES

Rappelons :

Définition.

Soient $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. On appelle **symétrie orthogonale par rapport à** F, la symétrie par rapport à F de direction $F^\perp$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des symétries orthogonales vectorielles :

Théorème.

Soit $(\mathcal{E}, \varphi)$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie. Les symétries orthogonales vectorielles de $\mathcal{E}$ sont les transformations orthogonales involutives de $\mathcal{E}$.

Nous savons déjà que toute symétrie vectorielle de $\mathcal{E}$ est une application linéaire involutive de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Montrons alors qu'une symétrie vectorielle orthogonale est une transformation orthogonale de $\mathcal{E}$.

Soit s la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel F de $\mathcal{E}$; si $x \in \mathcal{E}$ on a

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{avec} \quad x_1 \in \mathrm{F} \quad \text{et} \quad x_2 \in \mathrm{F}^{\perp}$$

et

$$s(x) = x_1 - x_2.$$

x_1 et x_2 étant orthogonaux, on a

$$\| x \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2$$

et

$$\| s(x) \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2,$$

d'où

$$\| s(x) \| = \| x \|$$

ce qui, s étant linéaire, prouve que s est une transformation orthogonale de $\mathcal{E}$.

Réciproquement, soit s une transformation orthogonale involutive de $\mathcal{E}$.

s étant un endomorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$, on sait (cf. § 1.19) que l'on peut associer à s, de manière unique, deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de $\mathcal{E}$ tels que s soit la symétrie par rapport à F de direction G.

Soient $x \in \mathrm{F}$, $y \in \mathrm{G}$. On a :

$$\varphi(s(x), s(y)) = \varphi(x, y)$$

d'où

$$\varphi(x, -y) = \varphi(x, y)$$

c'est-à-dire

$$-\varphi(x, y) = \varphi(x, y)$$

ce qui implique

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Il en résulte que F et G sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{E}$ et donc que $\mathrm{G} = \mathrm{F}^{\perp}$.

REMARQUE

On peut considérer $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ comme la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{E}$.

4. 8 SYMÉTRIES ORTHOGONALES VECTORIELLES HYPERPLANES

Parmi les symétries orthogonales vectorielles d'un espace vectoriel euclidien il en est qui, comme nous le verrons dans la suite, jouent un rôle particulièrement important en géométrie euclidienne : ce sont les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans vectoriels que nous appellerons *symétries orthogonales vectorielles hyperplanes*.

a) Expression d'une symétrie orthogonale vectorielle hyperplane.

Théorème.

Soient H un hyperplan vectoriel d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie $(\mathcal{E}, \varphi)$ et s la symétrie orthogonale par rapport à H. Si x est un vecteur unitaire orthogonal à H on a :

$$\forall y \in \mathcal{E} \qquad s(y) = y - 2\,\varphi(x, y)\, x.$$

En effet, on a

$$y = y' + \alpha x \quad \text{où} \quad y' \in \mathrm{H} \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

et

$$s(y) = y' - \alpha x$$
$$= y - 2\alpha x.$$

Or

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, y') + \alpha\,\varphi(x, x)$$
$$= \alpha$$

puisque d'une part x et y' sont orthogonaux et que d'autre part x est unitaire.

On a donc bien

$$s(y) = y - 2\,\varphi(x, y)\, x.$$

b) Détermination d'une symétrie orthogonale vectorielle hyperplane.

Nous allons voir qu'une symétrie orthogonale vectorielle hyperplane est parfaitement déterminée par tout couple constitué d'un vecteur et de son image.

Théorème.

Si x et y sont deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$, non nuls, distincts, de même norme, il existe une unique symétrie orthogonale vectorielle hyperplane s de $\mathcal{E}$ telle que $s(x) = y$.

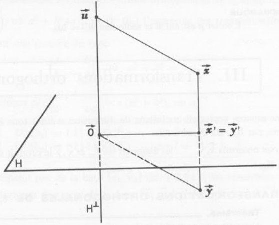
Notons u le vecteur $x - y$. Si s est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan vectoriel H de $\mathcal{E}$, répondant à la question, on doit avoir

$$s(u) = s(x) - s(y) = y - x = -u,$$

donc H est nécessairement l'hyperplan orthogonal à u (cf. § 1.19) d'où l'unicité de la solution.

Désignons donc par H l'hyperplan vectoriel orthogonal à u et par s la symétrie orthogonale par rapport à H (fig. 1)

fig. 1



On a

$$x = x' + \alpha u \quad \text{où} \quad x' \in \mathrm{H} \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
$$y = y' + \beta u \quad \text{où} \quad y' \in \mathrm{H} \quad \text{et} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

De $u = x - y$ on déduit

$$(x' - y') + (\alpha - \beta)\, u = u$$

d'où $\quad x' = y' \quad \text{et} \quad \alpha = \beta + 1.$

Or

$$\| x \|^2 = \| x' \|^2 + \alpha^2 \| u \|^2$$
$$\| y \|^2 = \| y' \|^2 + \beta^2 \| u \|^2,$$

x et y ayant même norme, on obtient $\alpha^2 = \beta^2$. Comme x et y sont distincts, cela donne

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{2},$$

d'où $\quad x = x' + \frac{u}{2}, \quad y = y' - \frac{u}{2}$

et l'on a bien $\quad y = s(x).$

4. 9 DÉCOMPOSITION D'UNE TRANSFORMATION ORTHOGONALE

Un des objets de la section III de ce chapitre va être de démontrer pour des espaces vectoriels euclidiens de dimension n, $n \leqslant 3$, le théorème de décomposition énoncé ci-dessous.

Nous n'en donnerons pas la démonstration dans le cas général (n quelconque).

Un sujet d'étude proposé à la fin de ce chapitre, et dont le but est d'établir ce résultat, peut être, dès maintenant, abordé par le lecteur. La démonstration qui y est suggérée n'est pas très difficile techniquement, elle est surtout assez longue.

Théorème.

Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension n. Étant donnée une transformation orthogonale l de $\mathcal{E}$, il existe un entier p, $p \leqslant n$, tel que :

(i) l est la composée de p symétries orthogonales vectorielles hyperplanes de $\mathcal{E}$.

(ii) la dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de l est $n - p$.

REMARQUE

L'entier p est nul si et seulement si $l = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

III. Transformations orthogonales de $\mathcal{E}_n$

Les espaces vectoriels euclidiens de dimension n étant tous isomorphes, nous désignerons par $\mathcal{E}_n$ l'un d'entre eux.

Nous noterons $\vec{x}, \vec{y}, \ldots$ les éléments de $\mathcal{E}_n$, et $\vec{x}\,.\,\vec{y}$ le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $\mathcal{E}_n$.

4. 10 TRANSFORMATIONS ORTHOGONALES DE $\mathcal{E}_1$

Théorème.

Les éléments de $O(\mathcal{E}_1)$ sont :

- $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1}$, application identique de $\mathcal{E}_1$
- $-\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1}$, symétrie par rapport à $\{\vec{0}\}$.

En effet, soit l une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_1$. Considérons un vecteur unitaire $\vec{e}_1$ de $\mathcal{E}_1$; on doit avoir

$$\| l(\vec{e}_1) \| = \| \vec{e}_1 \| = 1.$$

Comme $\vec{e}_1$ et $l(\vec{e}_1)$ sont linéairement dépendants, on a nécessairement

- soit $l(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$, auquel cas $l = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1}$
- soit $l(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1$, auquel cas $l = -\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1}$.

L'ensemble $\{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1}\}$ est un sous-groupe de $O(\mathcal{E}_1)$ que l'on notera $O^+(\mathcal{E}_1)$.

REMARQUE

La seule symétrie orthogonale vectorielle hyperplane de $\mathcal{E}_1$ étant $-\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1}$, le théorème de décomposition du § 4.9 est bien vérifié lorsque $n = 1$.

4. 11 TRANSFORMATIONS ORTHOGONALES DE $\mathcal{E}_2$

Dans ce paragraphe, on désignera par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée de $\mathcal{E}_2$.

Si l est une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_2$, on appellera matrice de l la matrice de l dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On a démontré en Première :

Théorème.

La matrice d'une transformation orthogonale l de $\mathcal{E}_2$ est de forme $\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & -\varepsilon a \end{pmatrix}$ où

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

On notera $O^+(\mathcal{E}_2)$ l'ensemble des transformations orthogonales de $\mathcal{E}_2$ ayant une matrice du type $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où $a^2 + b^2 = 1$, et $O^-(\mathcal{E}_2)$ l'ensemble des transformations orthogonales de $\mathcal{E}_2$ ayant une matrice du type

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Autrement dit, puisque $\det \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix} = \varepsilon (a^2 + b^2)$, on a

$$O^+(\mathcal{E}_2) = \{ l \mid l \in O(\mathcal{E}_2) \ , \ \det l = +1 \}$$
$$O^-(\mathcal{E}_2) = \{ l \mid l \in O(\mathcal{E}_2) \ , \ \det l = -1 \}$$

Comme $\det l$ ne dépend pas de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (cf. § 2.3 *b*)), les ensembles $O^+(\mathcal{E}_2)$ et $O^-(\mathcal{E}_2)$ ne dépendent pas non plus de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ choisie.

a) Étude de $O^+(\mathcal{E}_2)$.

Définition.

Les éléments de $O^+(\mathcal{E}_2)$ sont appelés **rotations vectorielles** de $\mathcal{E}_2$.

REMARQUE

Si $l \in O^+(\mathcal{E}_2)$ l'application $-l$ est aussi un élément de $O^+(\mathcal{E}_2)$ puisque

$$\det(-l) = \det(-\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2} \circ l) = \det(-\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}).\det l = 1.$$

Par contre, la somme de deux éléments de $O^+(\mathcal{E}_2)$ n'est pas en général un élément de $O^+(\mathcal{E}_2)$.

Théorème 1.

$O^+(\mathcal{E}_2)$ est un groupe commutatif dont les seuls éléments involutifs sont $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ et $-\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$.

Le fait que $O^+(\mathcal{E}_2)$ est un groupe commutatif a été démontré en Première et a été revu lors de l'étude des nombres complexes.

Cherchons les éléments involutifs de $O^+(\mathcal{E}_2)$.

Soit $l \in O^+(\mathcal{E}_2)$ tel que $l^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$; si $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est la matrice de l on doit avoir

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} 2ab = 0 \\ a^2 - b^2 = 1 \end{cases}$$

dont les seules solutions sont $b = 0$ et $a = \pm 1$, solutions qui correspondent donc à $l = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ et $l = -\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$.

Théorème 2.

Si l est une rotation vectorielle de $\mathcal{E}_2$, distincte de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$, le sous-espace des vecteurs invariants de l est $\{\vec{O}\}$.

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ la matrice de l. Si un vecteur $\vec{x}$ de $\mathcal{E}_2$, de coordonnées (x^1, x^2) dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est invariant par l, on a

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} ax^1 - bx^2 = x^1 \\ bx^1 + ax^2 = x^2 \end{cases}$$

et encore

$$\begin{cases} (a-1)\,x^1 - bx^2 = 0 \\ bx^1 + (a-1)\,x^2 = 0. \end{cases}$$

Comme $(a-1)^2 + b^2$ est non nul (sinon on aurait $a = 1$, $b = 0$, donc $l = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ ce qui est contraire à l'hypothèse), l'unique solution de ce système est $x^1 = x^2 = 0$.

Ce sont les seules propriétés du groupe $O^+(\mathcal{E}_2)$ que nous donnerons dans ce chapitre. Nous reprendrons l'étude de $O^+(\mathcal{E}_2)$ dans la section II du chapitre 5, section qui est consacrée à la notion d'angle.

b) Étude de $O^-(\mathcal{E}_2)$.

Théorème.

Soit l une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_2$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $l \in O^-(\mathcal{E}_2)$.

(ii) l est distincte de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ et $-\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ et est involutive.

(iii) l est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle de $\mathcal{E}_2$.

(iv) le sous-espace des vecteurs invariants de l est une droite vectorielle de $\mathcal{E}_2$.

Nous allons montrer successivement les implications

$$\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)} \;,\; \text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)} \;,\; \text{(iii)} \Longrightarrow \text{(iv)} \;,\; \text{(iv)} \Longrightarrow \text{(i)}.$$

• (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Soit l un élément de $O^-(\mathcal{E}_2)$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ sa matrice. La matrice de l^2 est :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc $l^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$.

Par ailleurs, l est évidemment distincte de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ et de $-\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$ puisque ces deux transformations orthogonales sont des éléments de $O^+(\mathcal{E}_2)$.

• (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Nous savons que l, étant involutive, est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{E}_2$.

On ne peut avoir $\dim F = 2$, car alors on aurait $F = \mathcal{E}_2$ et l serait égale à $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$.

De même on ne peut avoir $F = \{\vec{O}\}$ car dans ce cas on aurait $l = -\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$.

Il en résulte que l'on a nécessairement $\dim F = 1$ et donc que l est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle de $\mathcal{E}_2$.

• (iii) $\Longrightarrow$ (iv).

Si l est la symétrie vectorielle par rapport à la droite vectorielle F de $\mathcal{E}_2$, le sous-espace des vecteurs invariants de l est la droite F.

• (iv) $\Longrightarrow$ (i).

Soit l une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_2$ ayant pour seuls éléments invariants les vecteurs d'une droite vectorielle F de $\mathcal{E}_2$.

Si $\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$ est la matrice de l et si $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$ est un vecteur non nul de F, on a

$$\begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} (a-1)\,x^1 \quad \varepsilon b x^2 = 0 \\ bx^1 + (\varepsilon a - 1)\,x^2 = 0. \end{cases}$$

Supposons que $\varepsilon = +1$.

Nous avons vu que dans ce cas, le système n'a de solution non nulle que si $b = 0$.

L'application l est alors l'identité et $F = \mathcal{E}_2$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Par suite on a $\qquad \varepsilon = -1$ et $l \in O^-(\mathcal{E}_2)$.

REMARQUE

Une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle de $\mathcal{E}_2$ est aussi appelée symétrie orthogonale vectorielle axiale.

EXERCICE

1. Si l est un élément de $O^-(\mathcal{E}_2)$ quelles sont les droites vectorielles globalement invariantes par l?

c) **Conclusions.**

Comme les hyperplans vectoriels de $\mathcal{E}_2$ sont les droites vectorielles, nous devons, pour vérifier le théorème de décomposition énoncé au § 4.9, montrer que toute transformation orthogonale l de $\mathcal{E}_2$ est la composée de p symétries orthogonale par rapport à des droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$, où p est un entier au plus égal à 2 tel que $2 - p$ soit la dimension du sous-espace vectoriel des éléments invariants de l.

Ceci est réalisé pour les éléments de $O^-(\mathcal{E}_2)$ avec $p = 1$.

Nous avons vu au *a)* que tout élément de $O^+(\mathcal{E}_2)$, distinct de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$, admettait $\vec{O}$ pour seul vecteur invariant; il nous reste donc à vérifier que toute rotation vectorielle de $\mathcal{E}_2$, distincte de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$, est la composée de 2 symétries orthogonales vectorielles axiales de $\mathcal{E}_2$, c'est-à-dire la composée de deux éléments de $O^-(\mathcal{E}_2)$.

Lemme.

Soient l un élément de $O^+(\mathcal{E}_2)$ et h un élément de $O^-(\mathcal{E}_2)$. Les applications composées $l \circ h$ et $h \circ l$ sont des éléments de $O^-(\mathcal{E}_2)$.

En effet, on a $\det l = +1$, $\det h = -1$

et $\det(l \circ h) = \det(h \circ l) = \det h . \det l = -1$,

ce qui montre que $l \circ h$ et $h \circ l$ appartiennent à $O^-(\mathcal{E}_2)$.

Théorème.

Toute rotation vectorielle de $\mathcal{E}_2$ est la composée de deux symétries orthogonales vectorielles axiales, l'une d'elles pouvant être choisie arbitrairement.

Soient $l \in O^+(\mathcal{E}_2)$ et $s \in O^-(\mathcal{E}_2)$.

L'application s étant involutive on a

$$l = (l \circ s) \circ s \quad \text{et} \quad l = s \circ (s \circ l).$$

Dans le premier cas $h = l \circ s \in O^-(\mathcal{E}_2)$ et on a $l = h \circ s$,
dans le second $k = s \circ l \in O^-(\mathcal{E}_2)$ et $l = s \circ k$.

EXERCICE

2. Démontrer, réciproquement, que la composée de deux symétries orthogonales vectorielles axiales est une rotation vectorielle.

4. 12 TRANSFORMATIONS ORTHOGONALES DE $\mathcal{E}_3$

Dans ce paragraphe on désigne par l une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_3$ et par F le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de l.

Les restrictions de l à F et $F^\perp$ sont notées respectivement $l|_F$, $l|_{F^\perp}$.

Comme F est évidemment une partie stable de l, l'application $l|_{F^\perp}$ est un élément de $O(F^\perp)$ (cf. § 4.5).

Nous nous proposons de classer les transformations orthogonales l de $\mathcal{E}_3$ suivant la dimension de F. Nous écartons d'abord le cas où $\dim F = 3$, puisque alors $F = \mathcal{E}_3$ et $l = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$.

a) **dim F = 2.**

L'orthogonal de F est alors une droite vectorielle de $\mathcal{E}_3$ et $l|_{F^\perp}$ est une transformation orthogonale d'un espace vectoriel euclidien de dimension 1.

Comme $l|_{F^\perp}$ ne peut être l'identité (sinon on aurait $l = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$, on a nécessairement $l|_{F^\perp} = -\mathrm{Id}_{F^\perp}$. Il en résulte que l est la symétrie orthogonale par rapport à F.

Réciproquement si l est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel F de $\mathcal{E}_3$, F est l'ensemble des vecteurs invariants de l. On a donc :

Théorème.

Une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_3$ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel de $\mathcal{E}_3$ si et seulement si le sous-espace des vecteurs invariants est de dimension 2.

REMARQUE

Une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel de $\mathcal{E}_3$ est aussi appelée symétrie orthogonale vectorielle plane.

b) **dim F = 1.**

L'orthogonal de F est alors un plan et $l|_{F^\perp}$ est une transformation orthogonale d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2.

Comme $l|_{F^\perp}$ n'a pas d'autre élément invariant que $\vec{O}$ (car $F \cap F^\perp = \{\vec{O}\}$), $l|_{F^\perp}$ appartient à $O^+(F^\perp)$ et est distincte de $\mathrm{Id}_{F^\perp}$, donc est une rotation vectorielle de $F^\perp$ distincte de $\mathrm{Id}_{F^\perp}$.

Définition.

On appelle **rotation vectorielle** de $\mathcal{E}_3$ ou bien l'application identique $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$ ou bien toute transformation orthogonale dont le sous-espace des vecteurs invariants est de dimension 1. Dans ce dernier cas, ce sous-espace est appelé **axe** de la rotation vectorielle.

Nous allons maintenant établir que toute rotation vectorielle de $\mathcal{E}_3$, distincte de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$, est la composée de 2 symétries orthogonales vectorielles hyperplanes de $\mathcal{E}_3$, autrement dit la composée de 2 symétries orthogonales vectorielles planes de $\mathcal{E}_3$.

On a précisément :

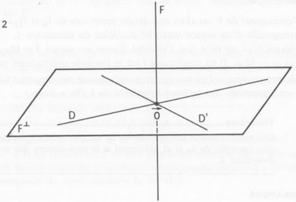
Théorème 1.

Soit F une droite vectorielle de $\mathcal{E}_3$. Toute rotation vectorielle l d'axe F est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des plans vectoriels contenant F, l'une de ces symétries pouvant être choisie arbitrairement.

Considérons une symétrie orthogonale s par rapport à un plan P contenant F.

La droite F étant invariante par s, la restriction σ de s à $F^{\perp}$ est une transformation orthogonale de $F^{\perp}$ admettant comme seuls vecteurs invariants les éléments de la droite $D = P \cap F^{\perp}$ (fig. 2).

fig. 2



Par suite $\sigma \in O^{-}(F^{\perp})$.

Il en résulte que l'on peut écrire

$$l|_{F^{\perp}} = \sigma' \circ \sigma$$

où $\sigma' \in O^{-}(F^{\perp})$ (cf. § 4.11 c)).

Soit D' la droite vectorielle de $F^{\perp}$ constituée des vecteurs invariants de σ'. Notons P' le sous-espace vectoriel $F + D'$ de $\mathcal{E}_3$ (on a même $P' = F \oplus D'$ puisque F et D' sont orthogonaux); P' est un plan vectoriel de $\mathcal{E}_3$ contenant F.

On désigne par s' la symétrie orthogonale par rapport à P'.

Nous allons montrer que $l = s' \circ s$, et pour cela vérifier que l'on a

$$l|_F = (s' \circ s)|_F$$

et

$$l|_{F^{\perp}} = (s' \circ s)|_{F^{\perp}}.$$

On a d'une part

$$s'|_F = \mathrm{Id}_F \quad , \quad s|_F = \mathrm{Id}_F$$

d'où

$$(s' \circ s)|_F = l|_F.$$

D'autre part

$$(s' \circ s)|_{F^{\perp}} = \sigma' \circ \sigma = l|_F$$

En conclusion, les applications linéaires l et $s' \circ s$ coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires; elles sont donc égales. On démontrerait de même l'existence d'une symétrie orthogonale s'' par rapport à un plan vectoriel P'' contenant F, telle que

$$l = s \circ s''.$$

EXERCICE

1. Si l est une rotation vectorielle d'axe F, déterminer les droites vectorielles de $\mathcal{E}_3$ globalement invariantes par l.
(Indication : on supposera qu'il existe une droite vectorielle D, distincte de F, globalement invariante par l. Dans ces conditions, le plan vectoriel $P = D + F$ est globalement invariant par l. On écrira alors $l = s' \circ s$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à P et s' une symétrie orthogonale vectorielle plane convenablement choisie.)

réciproquement on a :

Théorème 2.

La composée de deux symétries orthogonales vectorielles planes de $\mathcal{E}_3$ est une rotation vectorielle.

Soit s_1 (resp. s_2) la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel P_1 (resp. P_2) de $\mathcal{E}_3$.
Si $s_1 = s_2$ (ce qui équivaut à $P_1 = P_2$) on a $s_2 \circ s_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$.
Sinon, notons F la droite vectorielle $P_1 \cap P_2$.
Nous allons montrer que F est exactement l'ensemble des vecteurs invariants de $s_2 \circ s_1$.
Il est évident que tout élément de F étant invariant par s_1 et par s_2 l'est aussi par $s_2 \circ s_1$.

Soit $\vec{x}$ un vecteur invariant de $s_2 \circ s_1$. On peut écrire de manière unique $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{x}''$ où $\vec{x}'$ (resp. $\vec{x}''$) est un élément de F (resp. $F^{\perp}$).

Alors $$s_2 \circ s_1(\vec{x}) = s_2 \circ s_1(\vec{x}') + s_2 \circ s_1(\vec{x}'')$$

c'est-à-dire $$\vec{x} = \vec{x}' + s_2 \circ s_1(\vec{x}''),$$

ce qui implique que $$s_2 \circ s_1(\vec{x}'') = \vec{x}''.$$

Soit σ_1 (resp. σ_2) la restriction de s_1 (resp. s_2) à $F^{\perp}$; σ_1 (resp. σ_2) est une transformation orthogonale de $F^{\perp}$ admettant pour seuls éléments invariants les vecteurs de la droite $D_1 = P_1 \cap F^{\perp}$ (resp. $D_2 = P_2 \cap F^{\perp}$).
Par suite σ_1 et σ_2 sont des éléments de $O^{-}(F^{\perp})$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1 \in O^{+}(F^{\perp})$.
Comme nous avons supposé l'application $s_2 \circ s_1$ distincte de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$, sa restriction à $F^{\perp}$, c'est-à-dire $\sigma_2 \circ \sigma_1$, est distincte de $\mathrm{Id}_{F^{\perp}}$. Il en résulte que $\sigma_2 \circ \sigma_1$ n'a pas d'autre élément invariant que $\vec{O}$.

Par suite $\vec{x}'' = \vec{O}$, autrement dit $\vec{x} \in F$ et le sous-espace des vecteurs invariants de $s_2 \circ s_1$ est F, ce qui montre que $s_2 \circ s_1$ est une rotation vectorielle d'axe F.

Corollaire 1.

L'ensemble des rotations vectorielles de $\mathcal{E}_3$, noté $O^{+}(\mathcal{E}_3)$ est un sous-groupe de $O(\mathcal{E}_3)$.

Soient l_1 et l_2 deux rotations vectorielles. Nous les supposerons distinctes de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$ et nous noterons F_1 et F_2 leurs axes respectifs.
Si s est une symétrie orthogonale par rapport à un plan contenant F_1 et F_2 (lequel est unique lorsque F_1 et F_2 sont distincts), on peut écrire (cf. Théorème 1)
$l_1 = s \circ s_1$ où s_1 est une symétrie orthogonale vectorielle plane de $\mathcal{E}_3$.
$l_2 = s_2 \circ s$ où s_2 est une symétrie orthogonale vectorielle plane de $\mathcal{E}_3$.

Alors $$l_2 \circ l_1 = s_2 \circ s \circ s \circ s_1 = s_2 \circ s_1$$

et $$l_1^{-1} = s_1 \circ s$$

ce qui, d'après le théorème 2, prouve que $l_2 \circ l_1$ et l_1^{-1} appartiennent à $O^{+}(\mathcal{E}_3)$.

Corollaire 2.

La composée d'un nombre pair de symétries orthogonales vectorielles planes est un élément de $O^+(\mathcal{E}_3)$.

En effet si $l = s_{2p} \circ s_{2p-1} \circ \ldots \circ s_2 \circ s_1$ où $s_1, \ldots, s_{2p}$ sont des symétries orthogonales vectorielles planes, on a, en posant $l_1 = s_2 \circ s_1$, $l_2 = s_4 \circ s_3, \ldots, l_p = s_{2p} \circ s_{2p-1}$ $l = l_p \circ \ldots \circ l_1$ et les $l_1, \ldots, l_p$ sont des éléments de $O^+(\mathcal{E}_3)$. Alors l, composée d'éléments de $O^+(\mathcal{E}_3)$, est un élément de $O^+(\mathcal{E}_3)$ (cf. Corollaire 1).

REMARQUE

Soit $l \in O^+(\mathcal{E}_3)$. Si $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ est une base orthonormée de $F^\perp$ et $\vec{x}_3$ un vecteur unitaire de F, la matrice de l dans la base $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est du type

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1,$$

puisque la restriction de l à $F^\perp$ est une rotation vectorielle de $F^\perp$.

EXERCICE

2. Montrer qu'un élément l de $O^+(\mathcal{E}_3)$, distinct de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$, est une involution si et seulement si l est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle de $\mathcal{E}_3$.

Définition.

On appelle **retournement** (ou **demi-tour**) d'axe D, où D est une droite vectorielle de $\mathcal{E}_3$, la symétrie orthogonale par rapport à D.

EXERCICES

3. Montrer que toute rotation vectorielle l de $\mathcal{E}_3$ est la composée de deux retournements d'axes orthogonaux à F, l'un de ces retournements pouvant être choisi arbitrairement. (Indication : on se donnera un retournement t d'axe D orthogonal à F et on procédera de manière analogue à la démonstration du théorème 1 de ce paragraphe, en utilisant les restrictions de l et de t au sous-espace $F^\perp$).
4. Étant données deux rotations vectorielles l_1, l_2 d'axes F_1, F_2 montrer qu'en général $l_1 \circ l_2 \neq l_2 \circ l_1$. Dans quel cas a-t-on l'égalité? Que peut-on dire des axes de $l_1 \circ l_2$ et de $l_2 \circ l_1$?

c) **dim F = 0.**

Autrement dit $F = \{\vec{0}\}$.

Théorème 1.

Toute application orthogonale l de $\mathcal{E}_3$ ayant $\vec{0}$ pour seul élément invariant est la composée de trois symétries orthogonales vectorielles planes de $\mathcal{E}_3$.

Soit $\vec{x}$ un vecteur non nul de $\mathcal{E}_3$. Comme l est une transformation orthogonale, les vecteurs $\vec{x}$ et $l(\vec{x})$ ont même norme; il existe donc une symétrie orthogonale vectorielle plane s (et une seule) telle que $s(\vec{x}) = l(\vec{x})$, ou, ce qui est équivalent, telle que $s(l(\vec{x})) = \vec{x}$.

L'application $s \circ l$ est alors une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_3$ admettant $\vec{x}$ comme élément invariant, et par suite le sous-espace des vecteurs invariants de $s \circ l$ est de dimension supérieure ou égale à 1. Il ne peut être de dimension 2, car alors $s \circ l$ serait une symétrie orthogonale vectorielle plane σ et on aurait $l = s \circ \sigma$, donc l appartiendrait à $O^+(\mathcal{E}_3)$. Il ne peut non plus être de dimension 3, car on aurait alors $s \circ l = \mathrm{Id}_3$, c'est-à-dire $l = s$, et l serait une symétrie orthogonale vectorielle plane.

En conclusion $s \circ l$ est une rotation vectorielle distincte de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$; on peut alors écrire $s \circ l = s_2 \circ s_1$ où s_1 et s_2 sont des symétries orthogonales vectorielles planes, d'où

$$l = s \circ s_2 \circ s_1.$$

Corollaire.

Si l est une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_3$ ayant $\vec{0}$ pour seul élément invariant, l^2 est une rotation vectorielle de $\mathcal{E}_3$.

En effet, on a $l = s_3 \circ s_2 \circ s_1$ où s_1, s_2, s_3 sont des symétries orthogonales vectorielles planes.

Alors $l^2 = s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$ est le produit d'un nombre pair de symétries orthogonales vectorielles planes donc est un élément de $O^+(\mathcal{E}_3)$ (cf. b) corollaire 2).

Théorème 2.

Si l est une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_3$, distincte de $-\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$, ayant $\vec{0}$ pour seul élément invariant, l est d'une manière unique la composée d'une rotation vectorielle et d'une symétrie orthogonale vectorielle plane, l'axe de la rotation et le plan de la symétrie étant orthogonaux, ces deux applications étant permutables.

Nous allons d'abord établir :

Lemme.

Soient D et P une droite et un plan vectoriels de $\mathcal{E}_3$ orthogonaux. Si σ est la symétrie orthogonale par rapport à P et si ρ est une rotation vectorielle d'axe D, on a $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$.

Considérons un vecteur unitaire $\vec{x}_1$ de D et une base orthonormée $(\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ de P; $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est alors une base orthonormée de $\mathcal{E}_3$.

On a

$$\sigma \circ \rho(\vec{x}_1) = \sigma(\vec{x}_1) = -\vec{x}_1$$
$$\sigma \circ \rho(\vec{x}_2) = \rho(\vec{x}_2) \qquad \text{car P est stable pour } \rho$$
$$\sigma \circ \rho(\vec{x}_3) = \rho(\vec{x}_3) \qquad — \quad — \quad —$$

et

$$\rho \circ \sigma(\vec{x}_1) = \rho(-\vec{x}_1) = -\vec{x}_1$$
$$\rho \circ \sigma(\vec{x}_2) = \rho(\vec{x}_2)$$
$$\rho \circ \sigma(\vec{x}_3) = \rho(\vec{x}_3),$$

par suite les applications linéaires $\sigma \circ \rho$ et $\rho \circ \sigma$, coïncidant sur les éléments d'une base sont égales.

Démonstration du théorème 2.

• *Unicité de la décomposition.*

Supposons que l'on ait $l = \sigma \circ \rho$ où σ est la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel P et ρ une rotation vectorielle d'axe D orthogonal à P.

Si $\vec{x} \in D$ on a $l(\vec{x}) = \sigma \circ \rho(\vec{x}) = \sigma(\vec{x}) = -\vec{x}$,

d'où $$l^2(\vec{x}) = \vec{x}.$$

D'après le corollaire du théorème 1, l^2 est une rotation vectorielle; on ne peut avoir $l^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$ car la seule transformation orthogonale involutive n'ayant que $\{\vec{0}\}$ comme élément invariant est $-\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$ et on a écarté ce cas dans les hypothèses du théorème. Par suite l^2 est une rotation vectorielle d'axe D, ce qui montre l'unicité de P (car $P = D^{\perp}$) et donc celle de σ. L'unicité de ρ s'en suit puisque $\rho = \sigma \circ l$.

• *Existence d'une telle décomposition.*

Soient $\vec{x}$ un vecteur directeur de l'axe D de la rotation vectorielle l^2 et σ la symétrie orthogonale vectorielle plane échangeant $\vec{x}$ et $l(\vec{x})$.

Alors $l \circ \sigma$ est une rotation vectorielle ρ de $\mathcal{E}_3$ d'axe D puisque

$$l \circ \sigma(\vec{x}) = l \circ l(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Comme on a aussi $l \circ \sigma\left(l(\vec{x})\right) = l(\vec{x})$, $l(\vec{x})$ appartient à D. Il en résulte que le plan P de la symétrie σ, qui est l'orthogonal du vecteur $l(\vec{x}) - \vec{x}$, est le plan vectoriel orthogonal à D. De l'égalité $\rho = l \circ \sigma$, on déduit immédiatement $l = \rho \circ \sigma$.

4. 13 TABLEAU RÉCAPITULATIF DES RÉSULTATS

On désigne par l une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_n$ et par F le sous-espace des vecteurs invariants de l.

n	dim F	l
1	1	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1}$.
	0	$-\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1}$.
2	2	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_2}$.
	1	Symétrie orthogonale par rapport à la droite F.
	0	Rotation vectorielle.
3	3	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$.
	2	Symétrie orthogonale par rapport au plan F.
	1	Rotation vectorielle d'axe F.
	0	Composée de 3 symétries orthogonales vectorielles planes. (Forme réduite : composée d'une rotation vectorielle et d'une symétrie orthogonale vectorielle plane, l'axe de la rotation et le plan de la symétrie étant orthogonaux.)

EXERCICES

4.1 Soient u et v deux réels distincts.
On considère l'application φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui, au couple

$$(\vec{w}, \vec{w}') \quad , \quad \text{où} \quad \vec{w} = (x, y) \quad , \quad \vec{w}' = (x', y') \quad ,$$

associe

$$xx'e^{u^2} + (xy' + x'y)\, e^{uv} + yy'\, e^{v^2}.$$

Montrer que φ est un produit scalaire.

4.2 Montrer que sur $\mathbb{C}$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z, z') &\longmapsto \operatorname{Re}(z\bar{z}') \end{aligned}$$

où Re signifie « partie réelle », est un produit scalaire.
Trouver une base orthonormée de $\mathbb{C}$.
Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad , \quad \forall z' \in \mathbb{C} \quad ,$$

on a

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\,|z|^2 + z'|^2.$$

4.3 Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1° Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

2° Partant de la base P_0, P_1, P_2 de $\mathcal{E}$,
où

$$P_0(t) = 1 \quad , \quad P_1(t) = t \quad , \quad P_2(t) = t^2 \quad ,$$

trouver par le procédé de Schmidt une base orthonormée de $\mathcal{E}$.

4.4 Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega \in \mathbb{R}$.

On considère l'application φ de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ qui au couple (y_1, y_2) associe $\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} y_1(x)\, y_2(x)\, dx$.

Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.
Trouver une base orthonormée de $\mathcal{E}$.

4.5 Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs unitaires linéairement indépendants de $\mathcal{E}_2$.
On note s la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.
Montrer que $s(\vec{u}_1) = \vec{u}_2$.

4.6 Dans $\mathcal{E}_2$ muni de la base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, on considère la rotation vectorielle l ayant pour matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Étant donné $\vec{u}\,(1, -1)$ déterminer la base de la symétrie orthogonale axiale s telle que, $s_{\vec{u}}$ désignant la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$, on ait $s \circ s_{\vec{u}} = l$,

4.7 Soit $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}_2$.
On considère les vecteurs $\vec{u}\,(1, 1)$, $\vec{u}'\,(-1, 2)$;
on note s (resp. s') la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ (resp. $\vec{u}'$).
Quelles sont les matrices des rotations vectorielles $l_1 = s' \circ s$, $l_2 = s \circ s'$? Quelle relation a-t-on entre l_1 et l_2?

4.8 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{E}_2$ tels que

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants
- $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

On considère un endomorphisme l de $\mathcal{E}_2$ tel que

$$\|l(\vec{u})\| = \|\vec{u}\| \quad , \quad \|l(\vec{v})\| = \|\vec{v}\| \quad , \quad \|l(\vec{w})\| = \|\vec{w}\| \ .$$

1° Montrer que

$$l(\vec{u}) \,.\, l(\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v} \ .$$

2° Montrer que l est une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_2$.

4.9 Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs distincts de $\mathcal{E}_3$ tels que $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\| \neq 0$.
Montrer qu'une droite vectorielle D est l'axe d'une rotation vectorielle l telle que $l(\vec{u}) = \vec{u}'$ si et seulement si D appartient au plan vectoriel orthogonal à $\vec{u} - \vec{u}'$.

4.10 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ quatre vecteurs de $\mathcal{E}_3$ tels que

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants
- $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\|$, $\|\vec{v}\| = \|\vec{v}'\|$, $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u}' - \vec{v}'\|$.

1° Montrer que les seules transformations orthogonales l de $\mathcal{E}_3$ telles que $l(\vec{u}) = \vec{u}$ et $l(\vec{v}) = \vec{v}$ sont l'identité et la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2°

a) Si $\vec{u} = \vec{u}'$ montrer qu'il existe une rotation vectorielle l ayant pour axe la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et telle que $l(\vec{v}') = \vec{v}$.

b) Si $\vec{u} \neq \vec{u}'$ soit l_1 la rotation vectorielle d'axe orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ et telle que $l_1(\vec{u}') = \vec{u}$. Montrer qu'il existe une rotation vectorielle l_2 ayant pour axe la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et telle que $l_2 \circ l_1(\vec{v}') = \vec{v}$.

3° Déduire des deux questions précédentes qu'il existe exactement deux transformations orthogonales l de $\mathcal{E}_3$ telles que $l(\vec{u}) = \vec{u}'$ et $l(\vec{v}) = \vec{v}'$. L'une est positive, l'autre est négative.

4.11 On considère dans $\mathcal{E}_2$ la rotation vectorielle h ayant pour matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ de $\mathcal{E}_2$.
Déterminer les matrices dans cette base des rotations vectorielles l telles que $l^2 = h$.

4.12 Soit $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}_2$.
1° Quelle est la matrice de la symétrie orthogonale s par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}\,(1, 2)$.

2° On considère la rotation vectorielle l de matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Déterminer la symétrie orthogonale axiale s' telle que $l = s' \circ s$.
(On donnera la matrice de s' et les coordonnées d'un vecteur directeur de la base de s'.)

4.13 Dans le plan vectoriel euclidien $\mathcal{E}_2$ muni d'une base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, on considère les vecteurs $\vec{u}\,(1, 2)$, $\vec{v}\,(-1, 1)$ et les demi-droites vectorielles $D_{\vec{u}}^{+}$ et $D_{\vec{v}}^{+}$ qu'ils déterminent.
Quelles sont les matrices dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ des transformations orthogonales l de $\mathcal{E}_2$ telles que $l(D_{\vec{u}}^{+}) = D_{\vec{v}}^{+}$.

4.14 Soit $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}_3$.
On note r le retournement ayant pour axe la droite D engendrée par le vecteur $\vec{u}\,(1, 1, 1)$.

1° Montrer que l'image $\vec{v}'$ par r du vecteur $\vec{v}$ est caractérisée par :

- $(\vec{v}' - \vec{v}).\vec{u} = 0$
- $\vec{v}' + \vec{v}$ et $\vec{u}$ sont linéairement dépendants.

2° En déduire les coordonnées de $\vec{v}'$ en fonction de celles de $\vec{v}$.
Quelle est la matrice de r?

4.15 Soit B une base orthonormée ordonnée de $\mathcal{E}_3$.
On considère le plan vectoriel P engendré par les vecteurs $\vec{u}_1\,(1, 2, 0)$ et $\vec{u}_2\,(-1, 1, 1)$.

1° Montrer que l'image $\vec{v}'$ d'un vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{E}_3$ par la symétrie orthogonale s par rapport à P est caractérisée par :

- $\vec{v}' - \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$
- $\vec{v} + \vec{v}'$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont linéairement dépendants

ce qui est équivalent à

- $(\vec{v}' - \vec{v}).\vec{u}_1 = 0$
- $(\vec{v}' - \vec{v}).\vec{u}_2 = 0$
- $\det_B(\vec{v}' - \vec{v}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0.$.

2° Déterminer les coordonnées de $\vec{v}'$ en fonction de celles de $\vec{v}$. En déduire la matrice de s dans la base B.

4.16 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_3$.
On considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1, 2, -1)$ dans cette base, et le plan vectoriel H orthogonal à $\vec{u}$.
Déterminer les coordonnées $(\alpha', \beta', \gamma')$ de l'image $\vec{x}'$ du vecteur $\vec{x}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ par la symétrie orthogonale s par rapport à H.

4.17 Soit $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}_3$.

1° Montrer que la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix}$$

est, dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, la matrice d'une transformation orthogonale l de $\mathcal{E}_3$.

2° Montrer que l admet $\vec{0}$ comme seul vecteur invariant.

3° Il en résulte que l'on peut écrire, de manière unique, $l = \rho \circ s$ où ρ est une rotation, s une symétrie orthogonale plane, l'axe de ρ et le plan de s étant orthogonaux.

a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de l'axe de ρ (on rappelle que l'axe de ρ est aussi celui de la rotation vectorielle l^2).

b) Montrer que l'image $\vec{v}'$ d'un vecteur $\vec{v}$ par s est caractérisée par :

- $\vec{v}' - \vec{v}$ et $\vec{u}$ sont linéairement dépendants
- $(\vec{v}' + \vec{v}).\vec{u} = 0.$

c) Déterminer les coordonnées de $\vec{v}'$ en fonction de celles de $\vec{v}$.
Quelle est la matrice de s?

d) En déduire la matrice de ρ.

4.18 Dans un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$, on considère 3 droites vectorielles D_1, D_2, D_3, orthogonales deux à deux.
On note s_i, $i = 1, 2, 3$, la symétrie orthogonale par rapport à D_i.
Montrer que le sous-groupe de $O(\mathcal{E})$ engendré par s_1, s_2, s_3 (c'est-à-dire le plus petit sous-groupe de $O(\mathcal{E})$ contenant s_1, s_2, s_3) est un groupe à 4 éléments dont on écrira la table.

4.19 Dans un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$ on considère trois plans P_1, P_2, P_3 deux à deux orthogonaux.
On note s_i la symétrie orthogonale par rapport à P_i , $i = 1, 2, 3$.
Quel est le sous-groupe de $O(\mathcal{E})$ engendré par s_1, s_2, s_3.
Écrire sa table de multiplication.

4.20 Soient $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien et H_1, H_2 deux hyperplans de $\mathcal{E}$.
On note s_1 (resp. s_2) la symétrie orthogonale par rapport à H_1 (resp. H_2).
A quelle condition a-t-on $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$? Dans ce cas déterminer $s_2 \circ s_1$.

4.21 On considère dans un espace vectoriel euclidien $(\mathcal{E}, \varphi)$ un endomorphisme u tel que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \qquad \varphi(x, u(y)) = \varphi(u(x), y).$$

On suppose de plus que $\forall x > 0 \quad \varphi(x, u(x)) > 0.$

1° Montrer que l'application

$$(x, y) \longmapsto \varphi(x, u(y))$$

est un produit scalaire ψ sur $\mathcal{E}$.

2° Établir l'inégalité

$$\forall x \in \mathcal{E} \qquad \| u(x) \|^4 \leqslant \varphi(u(x), x).\varphi(u^2(x), u(x)).$$

4.22 Soient $\mathcal{E}_n$ un espace vectoriel euclidien de dimension n, et u un endomorphisme de $\mathcal{E}_n$.

1° Montrer que l'on définit un endomorphisme $\tilde{u}$ de $\mathcal{E}_n$, en posant

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{E}_n \quad \forall \vec{y} \in \mathcal{E}_n \quad \vec{x}.u(\vec{y}) = \tilde{u}(\vec{x}).\vec{y}.$$

2° Établir que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u \circ \tilde{u} = \tilde{u} \circ u$

(ii) $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \quad u(\vec{x}).u(\vec{y}) = \tilde{u}(\vec{x}).\tilde{u}(\vec{y})$

(iii) $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}_n \quad \| u(\vec{x}) \| = \| \tilde{u}(\vec{x}) \|.$

3° Soit A la matrice de u dans une base orthonormée $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de $\mathcal{E}_n$.
(Si $A = (a_i^j)$ on rappelle que $a_i^j = l(\vec{e}_i).\vec{e}_j$).
Comparer A et la matrice $\tilde{A}$ de $\tilde{u}$ dans cette même base.

4.23 Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On munit $\mathcal{E}$ d'un produit scalaire φ en posant :

si $\quad P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_n x^n$
et $\quad Q : x \longmapsto b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$

$$\varphi(P, Q) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

1° On note P_i le polynôme $x \longmapsto x^i$ où $i \in \{0, \ldots, n\}$.
Montrer que $\{P_0, \ldots, P_n\}$ est une base orthonormée de $(\mathcal{E}, \varphi)$.

2° On définit un endomorphisme u de $\mathcal{E}$ en posant

$$u(P_0) = 0$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad u(P_i) = P_{i-1}.$$

Montrer que l'on définit un endomorphisme $\tilde{u}$ de $\mathcal{E}$ en posant

$$\forall (P, Q) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \qquad \varphi(P, u(Q)) = \varphi(\tilde{u}(P), Q).$$

Déterminer $\tilde{u}(P_i)$ pour $i \in \{0, \ldots, n\}$.

3° Calculer

$$u \circ \tilde{u} \quad \text{et} \quad \tilde{u} \circ u.$$

4.24 Dans un espace vectoriel euclidien $(\mathcal{E}, \varphi)$ on considère une famille orthonormée $(x_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$.
Soit

$$x \in \mathcal{E} \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \alpha_i = \varphi(x, x_i).$$

1° Si $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i x_i$, calculer $\| x - y \|^2$ en fonction de $\| x \|$, des λ^i et des α_i.

2° Montrer que $\| x - y \|^2$ est minimal lorsque $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \; \lambda^i = \alpha_i$.
En déduire l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leqslant \| x \|^2.$$

4.25 1° Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n$ et p_F la projection orthogonale sur F.
Montrer que pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y})$ de vecteurs de $\mathcal{E}_n$ on a

$$\vec{x}.p_F(\vec{y}) = p_F(\vec{x}).\vec{y}.$$

2° Réciproquement, si p est un projecteur de $\mathcal{E}_n$ tel que, pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y})$ de vecteurs de $\mathcal{E}_n$, on ait $\vec{x}.p(\vec{y}) = p(\vec{x}).\vec{y}$, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{E}_n$ tel que $p = p_F$.

3° Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}_n$.
Montrer que p_F et p_G commutent si et seulement si $F^\perp$ et $G^\perp$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.
Dans ce cas établir que $p_F \circ p_G = p_{F \cap G}$.
Expliciter ce résultat lorsque $n = 3$ et lorsque F et G sont deux plans vectoriels.

4.26 Décomposition d'une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_n$.

Nous avons vu au § 4.10 que le théorème de décomposition énoncé au § 4.9 est vrai lorsque $n = 1$.
Nous nous proposons d'établir ce résultat pour tout espace vectoriel euclidien de dimension finie $\mathcal{E}_n$, $n > 1$, et ceci par récurrence sur n; nous supposerons donc le théorème vrai pour tout espace vectoriel euclidien de dimension inférieure ou égale à $n - 1$.

1° Soit l une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_n$ ayant au moins un élément invariant $\vec{x}_0 \neq 0$.

a) Soit H l'hyperplan vectoriel orthogonal à $\vec{x}_0$.
Montrer que la restriction de l à H est une transformation orthogonale de H.
Si $n - p$ est la dimension du sous-espace des vecteurs invariants de l, établir que la dimension du sous-espace des vecteurs invariants de $l|_H$ est $n - p - 1$.
En déduire, d'après l'hypothèse de récurrence, que $l|_H$ est la composée de p symétries orthogonales hyperplanes de H.

b) Soit $l|_H = \sigma_p \circ \ldots \circ \sigma_1$ la décomposition de $l|_H$, où σ_i est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan P_i de H.
Montrer que si H_i désigne le sous-espace vectoriel engendré par P_i et $\vec{x}_0$, H_i est un hyperplan de $\mathcal{E}_n$, et que si s_i est la symétrie orthogonale par rapport à H_i on a

$$l = s_p \circ \ldots \circ s_1.$$

2° Supposons maintenant que l est une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_n$ n'ayant aucun élément invariant non nul.

a) Soit $\vec{x}_0$ un vecteur non nul de $\mathcal{E}_n$.
Montrer qu'il existe une et une seule symétrie orthogonale hyperplane s de $\mathcal{E}_n$ telle que

$$l(\vec{x}_0) = s(\vec{x}_0).$$

b) Montrer que le sous-espace des vecteurs invariants de $s \circ f$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{x}_0$, donc est de dimension 1.
c) En déduire que $s \circ f$ est la composée de $n - 1$ symétries orthogonales hyperplanes de $\mathcal{E}_n$ (utiliser 1°), et que f est la composée de n symétries orthogonales hyperplanes de $\mathcal{E}_n$.

5| Orientation. Angles. Produit vectoriel

Orienter l'espace c'est décrire ce qui, dans le modèle, correspond à la constatation expérimentale que deux ensembles de l'espace peuvent être isométriques sans être superposables : le moulage en creux d'une main droite ne peut contenir une main gauche. Mathématiquement, cela correspond au fait que le groupe orthogonal O ($\mathcal{E}_3$) de l'espace euclidien contient un sous-groupe O^+ ($\mathcal{E}_3$) qui a la propriété suivante : le composé de tout couple d'éléments n'appartenant pas à O^+ ($\mathcal{E}_3$) appartient à O^+ ($\mathcal{E}_3$), et dont on peut caractériser très simplement les éléments par la propriété : leur déterminant vaut + 1. D'autres caractérisations seront données. Alors deux parties A et B de $\mathcal{E}_3$ sont « superposables » s'il existe un élément l de O^+ ($\mathcal{E}_3$) tel que l (A) = B.

L'image d'une base orthonormée par une transformation orthogonale est une base orthonormée et pour tout couple de bases orthonormées ordonnées (B_1, B_2) il existe exactement une transformation orthogonale l telle que $l(B_1) = B_2$. Si $l \in O^+$ ($\mathcal{E}_3$) les deux bases sont dites de même sens, sinon elles sont dites de sens contraires.
Cela permet de définir sur l'ensemble des bases orthonormées ordonnées une partition en deux classes.

Orienter l'espace c'est choisir une de ces classes dont les éléments seront alors appelés bases orthonormées directes.
Une théorie analogue a déjà été faite en Première pour le plan vectoriel euclidien $\mathcal{E}_2$, à l'occasion de l'étude des angles dans le plan.

Nous reprenons ici l'étude des angles et examinons la question des angles dans l'espace.

La fin du chapitre est consacrée au produit vectoriel, notion très utile en mécanique et en physique, qui sera présentée de deux façons différentes, l'une qui est la plus directe et qui utilise les déterminants, et l'autre apparemment plus élémentaire et qui ne le fait pas.

I. Orientation de $\mathcal{E}_n$, $n = 1, 2, 3$

5.1 DÉTERMINANT D'UNE TRANSFORMATION ORTHOGONALE DE $\mathcal{E}_n$

Soient $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}_n$ et l un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_n$.
Si A est la matrice de l dans la base B, on a vu que

$$l \in O(\mathcal{E}_n) \Longleftrightarrow \text{A est orthogonale}$$

et que

$$\text{A est orthogonale} \Longrightarrow \det A = \pm 1.$$

Comme $\det l = \det A$ (cf. § 2.3. c), on en déduit :

Théorème.

Si l est une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_n$ on a : $\det l = \pm 1$.

et

Corollaire.

L'application de $O(\mathcal{E}_n)$ dans le sous-groupe multiplicatif $\{1, -1\}$ de $\mathbb{R}^*$ qui a une transformation orthogonale l associe $\det l$ est un homomorphisme surjectif de groupes.

C'est une conséquence immédiate du § 2.3 b.

Définition.

Si l est une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_n$, on dit que l est une **transformation orthogonale positive** (resp. **négative**) lorsque $\det l = +1$ (resp. $\det l = -1$).

Exemple: déterminant d'une symétrie orthogonale vectorielle hyperplane.

Soit H un hyperplan vectoriel de $\mathcal{E}_n$ et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

Si $n = 1$, $H = \{\vec{0}\}$ et $s = -\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1}$, d'où $\det s = -1$. Supposons donc $n > 1$.

Considérons une base orthonormée $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1})$ de H et un vecteur unitaire $\vec{x}_n$ orthogonal à H.

On a alors : $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\} \quad s(\vec{x}_i) = \vec{x}_i$

et $\quad s(\vec{x}_n) = -\vec{x}_n$.

Par suite, si on désigne par B la base orthonormée ordonnée $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ on a

$$\begin{aligned}\det s &= \det_B\left(s(\vec{x}_1), \ldots, s(\vec{x}_n)\right)\\ &= \det_B(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1}, -\vec{x}_n)\\ &= -\det_B(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)\\ &= -1.\end{aligned}$$

Concluons :

Théorème.

Toute symétrie orthogonale vectorielle hyperplane de $\mathcal{E}_n$ est une transformation orthogonale négative.

5. 2 PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DE $O^+(\mathcal{E}_n)$

Nous avons défini, dans chaque cas $n = 1, 2, 3$, l'ensemble $O^+(\mathcal{E}_n)$ et montré qu'il était un sous-groupe de $O(\mathcal{E}_n)$.

Comme conséquence de l'étude des transformations orthogonales de $\mathcal{E}_n$ faite précédemment, et de leur décomposition, on a :

Théorème 1.

Soit l une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_n$, $n = 1, 2, 3$, et F le sous-espace des vecteurs invariants de l. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) l appartient à $O^+(\mathcal{E}_n)$

(ii) l est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales vectorielles hyperplanes

(iii) $\dim F = n - p$ où p est un entier pair inférieur ou égal à n.

Corollaire.

Si $l = s_p \circ \ldots \circ s_1$ et $l = \sigma_q \circ \ldots \circ \sigma_1$ où $s_1, \ldots, s_p, \sigma_1, \ldots, \sigma_q$ sont des symétries orthogonales vectorielles hyperplanes de $\mathcal{E}_n$, les entiers p et q ont même parité.

En effet, de l'égalité

$$s_p \circ \ldots \circ s_1 = \sigma_q \circ \ldots \circ \sigma_1,$$

on déduit

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_n} = \sigma_q \circ \ldots \circ \sigma_1 \circ s_1 \circ \ldots \circ s_p.$$

Or $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_n}$ est un élément de $O^+(\mathcal{E}_n)$, par suite $p + q$ doit être pair, ce qui n'est possible que si p et q ont même parité.

On peut déduire aussi du théorème 1 le résultat très important suivant :

Théorème 2.

Soit l une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_n$. On a :

$$l \in O^+(\mathcal{E}_n) \iff \det l = +1.$$

En effet on sait que l'on peut écrire

$$l = s_p \circ \ldots \circ s_1$$

où $s_1, \ldots, s_p$ sont des symétries orthogonales vectorielles hyperplanes.

Comme $\quad \det l = \det s_p \ldots \det s_1$

et que $\quad \forall i \in \{1, \ldots, p\} \quad \det s_i = -1,$

on obtient $\quad \det l = (-1)^p.$

Donc $\quad l \in O^+(\mathcal{E}_n) \iff p$ est pair $\iff \det l = 1.$

REMARQUE

Cette propriété caractéristique des éléments de $O^+(\mathcal{E}_n)$ en constitue la meilleure définition. Celle que nous avons donnée, dans chaque cas $n = 1, 2, 3$, a le mérite, lorsque $n = 3$, de dispenser du recours aux déterminants d'ordre 3. Mais elle a l'inconvénient de priver des facilités que permet l'usage des déterminants. Par exemple, la définition de $O^+(\mathcal{E}_n)$ par

$$O^+(\mathcal{E}_n) = \{l \mid l \in O(\mathcal{E}_n) \quad , \quad \det l = +1\}$$

le fait apparaître comme l'image réciproque du sous-groupe $\{1\}$ du groupe $\{1, -1\}$, par l'homomorphisme de groupes de $O(\mathcal{E}_n)$ sur $\{1, -1\}$ défini par $l \longmapsto \det l$, et permet donc de conclure immédiatement que $O^+(\mathcal{E}_n)$ est un sous-groupe de $O(\mathcal{E}_n)$. De même, pour tout n, on notera $O^-(\mathcal{E}_n)$ l'ensemble $\{l \mid l \in O(\mathcal{E}_n), \det l = -1\}$, c'est-à-dire l'ensemble des transformations orthogonales négatives.

Avec ces définitions il est immédiat que la composée des éléments l et h de $O^-(\mathcal{E}_n)$ appartient à $O^+(\mathcal{E}_n)$, puisque $\det (h \circ l) = \det h \det l = (-1)^2 = 1$.

5. 3 ORIENTATION DE $\mathcal{E}_n$

Rappelons que si $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ et $B' = \{\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n\}$ sont deux bases orthonormées ordonnées de $\mathcal{E}_n$ il existe une unique transformation orthogonale l de $\mathcal{E}_n$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $l(\vec{e}_i) = \vec{e}'_i$, ce que l'on convient d'écrire $B' = l(B)$ (cf. § 4.5 exercice 1).

Théorème.

La relation $\quad B \sim B' \iff \exists\, l \in O^+(\mathcal{E}_n) \quad B' = l(B)$

est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathcal{B}$ des bases orthonormées ordonnées de $\mathcal{E}_n$, dont elle réalise une partition en deux classes.

Vérifions d'abord qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

- On a $B \sim B$, car $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_n} \in O^+(\mathcal{E}_n)$.
- Si $B \sim B'$, on a $B' \sim B$, car $l \in O^+(\mathcal{E}_n) \Longrightarrow l^{-1} \in O^+(\mathcal{E}_n)$, et $l^{-1}(B') = B$.
- Si $B \sim B'$ et $B' \sim B''$ il existe l et h dans $O^+(\mathcal{E}_n)$ telles que

$$l(B) = B' \quad , \quad h(B') = B'' ;$$

alors

$$h \circ l \in O^+(\mathcal{E}_n) \quad \text{et} \quad h \circ l(B) = B'' \quad , \quad \text{d'où} \quad B \sim B''.$$

Montrons maintenant qu'il y a exactement deux classes d'équivalence.

- $(\mathcal{B}, \sim)$ a au moins deux classes :

en effet soit B une base orthonormée ordonnée de $\mathcal{E}_n$. Si l est une transformation orthogonale négative de $\mathcal{E}_n$ (il en existe au moins une, $O^-(\mathcal{E}_n)$ n'est jamais vide; il contient par exemple les symétries orthogonales hyperplanes), $l(B)$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}_n$ et B et $l(B)$ ne sont pas équivalentes.

- $(\mathcal{B}, \sim)$ a exactement deux classes :

Soient B, B′ deux bases orthonormées ordonnées de $\mathcal{E}_n$ non équivalentes. Si B″ est une troisième base orthonormée ordonnée de $\mathcal{E}_n$, on sait qu'il existe deux transformations orthogonales l et h telles que

$$l(B) = B'' \quad \text{et} \quad h(B'') = B'.$$

Alors l et h ne peuvent être toutes deux dans $O^+(\mathcal{E}_n)$ ni toutes deux dans $O^-(\mathcal{E}_n)$ car on aurait dans ce cas

$$h \circ l(B) = B' \quad \text{avec} \quad h \circ l \in O^+(\mathcal{E}_n)$$

ce qui est contraire à l'hypothèse, B et B′ n'étant pas équivalentes.

Par suite une, et une seule, des transformations orthogonales l et h est positive, donc B″ est soit équivalente à B soit équivalente à B′.

REMARQUE

Il résulte de l'exercice 3 du § 4.6. que

$$B \sim B' \Longleftrightarrow \det_B(B') = +1.$$

EXERCICE

Reprendre la démonstration précédente en utilisant comme définition de la relation $\sim$:

$$B \sim B' \Longleftrightarrow \det_B(B') = +1.$$

Définition.

Orienter $\mathcal{E}_n$ c'est choisir une des classes d'équivalence de $(\mathcal{B}, \sim)$. Les éléments de cette classe sont appelés **bases orthonormées directes.**

REMARQUE

Il est important de ne pas oublier qu'une base orthonormée directe est une base ordonnée.

Comme il est évidemment équivalent de choisir une classe de $(\mathcal{B}, \sim)$ ou de choisir un représentant de cette classe, un espace vectoriel euclidien est orienté dès que l'on choisit une base orthonormée ordonnée que l'on qualifie de directe, la classe de cette base dans $\mathcal{B}/_{\sim}$ étant celle des bases orthonormées directes.

En résumé :

Si $\mathcal{E}_n$ est orienté par la donnée d'une base orthonormée ordonnée B, une base orthonormée ordonnée B′ définit la même orientation si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) $\exists\, l \in O^+(\mathcal{E}_n) \quad B' = l(B)$

(ii) $\det_B(B') = +1$.

Si $n = 1$, lorsque $\mathcal{E}_1$ est orienté par la base orthonormée $\{\vec{e}_1\}$ la demi-droite ouverte $\{\lambda\, \vec{e}_1 \mid \lambda > 0\}$ de vecteur directeur $\vec{e}_1$ est appelée **demi-droite positive** de $\mathcal{E}_1$.

5. 4 ORIENTATIONS COMPATIBLES DE DEUX SUPPLÉMENTAIRES ORTHOGONAUX

Définition.

Soient F′, F″ deux sous-espaces vectoriels propres de l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_n$ orienté.

Supposons que F′ et F″ sont des supplémentaires orthogonaux et qu'ils sont orientés respectivement par des bases orthonormées ordonnées

$$B' = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\} \quad , \quad B'' = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q\}.$$

Dans ce cas on dit que **l'orientation de F″ est compatible avec l'orientation de F′** si $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q\}$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_n$.

REMARQUE

Nous verrons dans la suite que, lorsque l'orientation de F″ est compatible avec celle de F′, l'orientation de F′ n'est pas nécessairement compatible avec celle de F″. Il est donc très important de préciser l'ordre dans lequel on utilise F′ et F″.

Théorème.

Si P est un plan vectoriel orienté de l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathcal{E}_3$ il n'y a qu'une seule manière d'orienter la droite vectorielle $P^\perp$ pour que son orientation soit compatible avec celle de P.

Nous allons donner deux démonstrations de ce résultat.

- *Première démonstration.*

P est orienté par une base orthonormée ordonnée $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$. La droite vectorielle $P^\perp$ a exactement deux vecteurs unitaires que nous noterons $\vec{x}_3$ et $\vec{x}'_3$ $(\vec{x}'_3 = -\vec{x}_3)$, donc l'ensemble des bases orthonormées de $P^\perp$ a deux éléments qui sont

$$\{\vec{x}_3\} \quad \text{et} \quad \{\vec{x}'_3\}.$$

On pose

$$B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} \quad , \quad B' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$$

B et B′ sont deux bases orthonormées ordonnées de $\mathcal{E}_3$ et B′ est l'image de B par la symétrie orthogonale s par rapport à P, puisque pour cette symétrie s on a :

$$s(\vec{x}_1) = \vec{x}_1$$
$$s(\vec{x}_2) = \vec{x}_2$$
$$s(\vec{x}_3) = -\vec{x}_3 = \vec{x}'_3.$$

Il en résulte que B et B′ ne sont pas équivalentes et qu'une seule des deux est une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_3$.

• *Seconde démonstration.*

Avec les notations précédentes on a :

$$\begin{aligned}\det_B (B') &= \det_B (\vec{x}_1, \vec{x}_2, -\vec{x}_3)\\ &= -\det_B (B)\\ &= -1\end{aligned}$$

ce qui montre que B et B′ ne sont pas équivalentes et donc qu'une seule de ces deux bases orthonormées ordonnées est directe.

EXERCICES

1. Montrer que si D est une droite vectorielle orientée de l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_3$ orienté, il n'y a qu'une seule manière d'orienter le plan vectoriel $D^\perp$ pour que son orientation soit compatible avec celle de D. $D^\perp$ étant ainsi orienté montrer que l'orientation de D est aussi compatible avec celle de $D^\perp$.
2. Soit H un hyperplan vectoriel de l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_4$ orienté. On suppose que H et $H^\perp$ sont orientés par des bases orthonormées ordonnées $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ et $\{\vec{x}_4\}$ de telle sorte que l'orientation de $H^\perp$ soit compatible avec celle de H. Vérifier que l'orientation de H n'est pas compatible avec celle de $H^\perp$.

D'une manière générale, on peut énoncer :

Théorème.

Soient F′ et F″ deux sous-espaces vectoriels propres de l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_n$ orienté.

Supposons que F′ et F″ soient supplémentaires et orthogonaux. Alors, étant donnée une orientation de F′ il existe une et une seule orientation de F″ compatible avec celle de F′.

Nous allons donner deux démonstrations de ce résultat.

• *Première démonstration.*

F′ est orienté par la donnée d'une base orthonormée ordonnée $B' = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$.

1. Il existe au moins une base orthonormée ordonnée $B'' = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q\}$ de F″ telle que la base orthonormée ordonnée $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q\}$ soit directe :

en effet si $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q\}$ est une base orthonormée ordonnée de F″ et si la base orthonormée ordonnée $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q\}$ n'est pas directe, il est immédiat que la base orthonormée ordonnée $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \ldots, -\vec{y}_q\}$ est directe puisque on l'obtient à partir de la précédente au moyen de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan vectoriel de $\mathcal{E}_n$ engendré par les vecteurs $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{q-1}$, c'est-à-dire au moyen d'une transformation orthogonale négative.

2. Supposons alors que F″ soit orienté par une base orthonormée ordonnée $B'' = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q\}$ et que cette orientation soit compatible avec celle de F′. Soit $\{\vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q\}$ une base orthonormée ordonnée de F″ et l'' l'unique élément de O (F″) tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, q\} \qquad l''(\vec{y}_i) = \vec{y}'_i.$$

Considérons l'application l de $\mathcal{E}_n$ dans lui-même définie de la façon suivante : x étant un vecteur de $\mathcal{E}_n$, on peut écrire $x = x' + x''$ avec $x' \in F'$, $x'' \in F''$, on pose alors $l(x) = x' + l''(x'')$.

Il résulte de l'exercice 2 du § 4.5 que $l \in O(\mathcal{E}_n)$.

Par ailleurs on a

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \qquad l(\vec{x}_i) = \vec{x}_i$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, q\} \qquad l(\vec{y}_j) = \vec{y}'_j.$$

On sait que l'on peut écrire

$$l'' = \sigma_h \circ \ldots \circ \sigma_1$$

où $\sigma_1, \ldots, \sigma_h$ sont des symétries orthogonales par rapport à des hyperplans vectoriels $P_1, \ldots, P_h$ de F″.

Il en résulte que, si $s_1, \ldots, s_h$ désignent les symétries orthogonales de $\mathcal{E}_n$ par rapport aux hyperplans vectoriels $H_1 = F' \oplus P_1, \ldots, H_h = F' \oplus P_h$, on a :

si $\quad x' \in F' \quad$ et $\quad x'' \in F''$

$$\begin{aligned}
s_1(x' + x'') &= x' + s_1(x'') \qquad \text{puisque } x' \in H_1\\
s_2 \circ s_1(x' + x'') &= x' + s_2 . s_1(x'') \qquad \text{puisque } x' \in H_2\\
&\ldots\ldots\ldots\\
s_h \circ \ldots \circ s_1(x' + x'') &= x' + s_h \circ \ldots \circ s_1(x'');
\end{aligned}$$

or la restriction de $s_h \circ \ldots \circ s_1$ à F″ étant évidemment $\sigma_h \circ \ldots \circ \sigma_1$, on obtient :

$$s_h \circ \ldots \circ s_1(x' + x'') = x' + l''(x'')$$

et par suite

$$l = s_h \circ \ldots \circ s_1.$$

En conclusion :

Si $\{\vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q\}$ n'est pas une base orthonormée directe de F″, l'' est un élément de $O^-(F'')$ et par suite l'entier h est impair. L'application l est alors la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales vectorielles hyperplanes et est donc une transformation orthogonale négative de $\mathcal{E}_n$. Dans ce cas la base orthonormée ordonnée $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q\}$ n'est pas directe.

Si $\{\vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q\}$ est une base orthonormée directe de F″, l'' est un élément de $O^+(F'')$ et par suite l'entier h est pair. L'application l est alors la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales vectorielles hyperplanes et est donc une transformation orthogonale positive de $\mathcal{E}_n$. Dans ce cas la base orthonormée ordonnée $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q\}$ est directe.

3. Nous avons montré qu'étant donnée une base orthonormée ordonnée B′ de F′, il existe une unique orientation de F″ compatible avec l'orientation de F′ définie par B′. Une démonstration analogue à 2 montre que ceci ne dépend que de l'orientation de F′ et non du choix particulier de la base orthonormée directe B′.

• *Deuxième démonstration.*

F′ est orienté par la donnée d'une base orthonormée ordonnée $B' = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$.

1. Il existe au moins une base orthonormée ordonnée $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q\}$ de F″ telle que la base orthonormée ordonnée $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q\}$ soit directe :

en effet, si $\{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q\}$ est une base orthonormée ordonnée de F″ et si la base orthonormée ordonnée $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q\}$ n'est pas directe, on a, en désignant par B une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_n$,

$$\det_B(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q) = -1$$

et par suite

$$\det_B(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \ldots, -\vec{y}_q) = +1$$

ce qui prouve que la base orthonormée ordonnée $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \ldots, -\vec{y}_q\}$ est directe.

2. Supposons alors que F″ soit orienté par une base orthonormée ordonnée $B'' = \{\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q\}$ et que cette orientation soit compatible avec celle de F′.

Soit $\{\vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q\}$ une base orthonormée ordonnée de F″. Considérons l'application

$$\varphi : \quad \begin{aligned} F''^q &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_q) &\longmapsto \det_B(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_q);\end{aligned}$$

φ est une forme q-linéaire alternée sur F″ et

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q) &= \det_B(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_q)\\ &= +1\end{aligned}$$

donc φ est l'application $\det_{B''}$.

On obtient en particulier :

$$\det_B (x_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q) = \det_{B''} (\vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q).$$

En conclusion :

Si $\{\vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q\}$ est une base orthonormée directe de F″, on a $\det_{B''} \{\vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q\} = +1$ et $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q\}$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_n$.

Si $\{\vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q\}$ n'est pas une base orthonormée directe de F″, on a $\det_{B''} \{\vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q\} = -1$ et $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}'_1, \ldots, \vec{y}'_q\}$ n'est pas une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_n$.

3. Reprendre la 3e partie de la première démonstration.

En particulier, si H est un hyperplan orienté de l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathcal{E}_n$, la droite vectorielle $H^\perp$, que l'on appelle souvent la **normale** de H, peut recevoir une orientation compatible avec celle de H. Dans ce cas la demi-droite positive de $H^\perp$ est appelée **demi-normale positive** de H.

On peut conclure d'après le théorème précédent que :

1. Dans un plan vectoriel euclidien orienté $\mathcal{E}_2$, étant donné un vecteur unitaire $\vec{u}$, il existe un et un seul vecteur unitaire $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ tel que la base orthonormée ordonnée $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ soit directe.
Ce résultat avait été démontré en Première.

2. Dans un espace vectoriel euclidien orienté $\mathcal{E}_3$, étant donnés deux vecteurs unitaires orthogonaux $\vec{u}, \vec{v}$, il existe un et un seul vecteur unitaire $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ tel que la base orthonormée ordonnée $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ soit directe.
Ceci est une manière d'énoncer le premier théorème de ce paragraphe. C'est un résultat très important que nous utiliserons souvent dans la suite de ce cours.

3. Dans un espace vectoriel euclidien orienté $\mathcal{E}_3$, étant donné un vecteur unitaire $\vec{u}$, il existe au moins un couple $(\vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs unitaires orthogonaux entre eux et orthogonaux à $\vec{u}$ tels que la base orthonormée ordonnée $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ soit directe. (Cf. exercice 1.)

II. Angles dans $\mathcal{E}_n$

5. 5 GROUPE DES ANGLES DE DEMI-DROITES VECTORIELLES DE $\mathcal{E}_2$

Nous rappelons dans ce paragraphe des définitions données en Première ainsi que les théorèmes obtenus. Nous ne donnerons pas de démonstrations pour ces derniers, en laissant au lecteur le soin de les retrouver soit lui-même soit en consultant le livre de Première.

a) Angle de deux demi-droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$.

Définition.

Si $\vec{x}$ est un vecteur non nul de $\mathcal{E}_2$, on appelle **demi-droite vectorielle de vecteur directeur** $\vec{x}$, ou **demi-droite déterminée par** $\vec{x}$, l'ensemble $\{\lambda\vec{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}_+\}$.

Une demi-droite vectorielle de $\mathcal{E}_2$ est donc parfaitement déterminée par son unique vecteur directeur unitaire, ce qui permet d'établir une bijection entre l'ensemble des demi-droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$ et l'ensemble $\mathcal{U}$ des vecteurs unitaires de $\mathcal{E}_2$.

Théorème.

Le groupe $O^+(\mathcal{E}_2)$ opère de façon simplement transitive dans $\mathcal{U}$, autrement dit, étant donné un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs unitaires de $\mathcal{E}_2$, il existe une et une seule rotation vectorielle l de $\mathcal{E}_2$ telle que $l(\vec{u}) = \vec{v}$.

Il en résulte immédiatement :

Corollaire.

Le groupe $O^+(\mathcal{E}_2)$ opère de façon simplement transitive dans l'ensemble $\mathcal{D}$ des demi-droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$, autrement dit, étant donné un couple (D, D′) de demi-droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$, il existe une et une seule rotation vectorielle l de $\mathcal{E}_2$ telle que $l(D) = D'$.

On peut alors définir l'angle de deux demi-droites vectorielles D, D′ de $\mathcal{E}_2$, de la manière suivante :

Théorème et définition.

Dans l'ensemble $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ la relation

$$\text{« } (D_1, D'_1) \sim (D_2, D'_2) \iff \exists\, l \in O^+(\mathcal{E}_2) \text{ telle que } l(D_1) = D'_1 \text{ et } l(D_2) = D'_2 \text{ »}$$

est une relation d'équivalence.

L'ensemble quotient $\mathcal{D} \times \mathcal{D}/_\sim$, noté $\mathcal{A}$, est appelé **ensemble des angles de demi-droites vectorielles de** $\mathcal{E}_2$. La classe du couple (D, D′) est l'angle des demi-droites vectorielles D, D′, on le note angle (D, D′).

Nous dirons de même :

Définition.

On appelle **angle** de deux vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{u}'$ de $\mathcal{E}_2$, l'angle des deux demi-droites vectorielles qu'ils déterminent ; on le note angle $(\vec{u}, \vec{u}')$.

b) Étude de $\mathcal{A}$.

Théorème.

L'application de $O^+(\mathcal{E}_2)$ dans $\mathcal{A}$ qui à l associe $\varphi = \text{angle}\,(D, l(D))$, où D est une demi-droite vectorielle de $\mathcal{E}_2$, est une bijection qui ne dépend pas du choix particulier de D.

Autrement dit il existe une bijection canonique de $O^+(\mathcal{E}_2)$ sur $\mathcal{A}$.

Définition.

L'image φ de l par cette bijection est appelé **angle de la rotation vectorielle** l.

EXERCICE

1. Si φ est l'angle de la rotation vectorielle l, montrer que pour tout couple $(\vec{u}, \vec{u}')$ de vecteurs de $\mathcal{E}_2$ on a :

$$l(\vec{u}) = \vec{u}' \iff \|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\| \text{ et angle } (\vec{u}, \vec{u}') = \varphi.$$

Au moyen de la bijection canonique de $O^+(\mathcal{E}_2)$ sur $\mathcal{A}$, on peut transporter sur $\mathcal{A}$ la structure de groupe abélien de $O^+(\mathcal{E}_2)$; on note $+$ la loi de groupe ainsi obtenue sur $\mathcal{A}$.
Alors la bijection canonique de $O^+(\mathcal{E}_2)$ sur $\mathcal{A}$ est un homomorphisme de groupes, c'est donc un isomorphisme de groupes.

Définition.

Le groupe $(\mathcal{A}, +)$ est appelé **groupe des angles de demi-droites vectorielles** du plan vectoriel euclidien $\mathcal{E}_2$.

Il est très important de ne pas oublier qu'il n'y a pas « un » groupe des angles, mais chaque plan vectoriel euclidien est associé le groupe des angles de demi-droites vectorielles de ce plan.
Lorsque l'on utilise plusieurs plans vectoriels euclidiens il peut être commode, pour éviter toute confusion, de noter $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ le groupe associé à l'un d'eux $\mathcal{E}$. L'exercice suivant va préciser le lien entre ces divers groupes.

EXERCICE

2. Soient $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}'_2$ deux plans vectoriels euclidiens.
(i) Montrer que l'ensemble des applications orthogonales de $\mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}'_2$ n'est pas vide, et que toutes ces applications sont bijectives.
On note f l'une d'elles.
(ii) Soit $h : O^+(\mathcal{E}_2) \longrightarrow O(\mathcal{E}'_2)$
l'application définie par
$$\forall l \in O^+(\mathcal{E}_2) \qquad h(l) = f \circ l \circ f^{-1}.$$
Montrer que $\forall l \in O^+(\mathcal{E}_2)$ $h(l)$ est un élément de $O^+(\mathcal{E}'_2)$ et que h est un isomorphisme de groupes de $O^+(\mathcal{E}_2)$ sur $O^+(\mathcal{E}'_2)$.
(iii) En déduire un isomorphisme $\bar{h}$ de $\mathcal{A}(\mathcal{E}_2)$ sur $\mathcal{A}(\mathcal{E}'_2)$ tel que le diagramme
$$\begin{array}{ccc} O^+(\mathcal{E}_2) & \xrightarrow{h} & O^+(\mathcal{E}'_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}(\mathcal{E}_2) & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathcal{A}(\mathcal{E}'_2) \end{array}$$
où les flèches verticales sont les bijections canoniques, soit commutatif.

On a, d'après la définition de la loi $+$ sur $\mathcal{A}$:

Théorème.

Quelles que soient les demi-droites vectorielles D, D', D'' de $\mathcal{E}_2$, on a la **« relation de Chasles » :**
$$\text{angle}(D, D') + \text{angle}(D', D'') = \text{angle}(D, D'').$$

L'élément neutre de $(\mathcal{A}, +)$ est l'angle de la rotation vectorielle $Id_{\mathcal{E}_2}$, on le note ω.
On a donc :
$$\forall D \in \mathfrak{D} \qquad \omega = \text{angle}(D, D).$$
On dit que ω est **l'angle nul.**
L'opposé d'un angle φ de $\mathcal{A}$ sera noté $-\varphi$; si φ est l'angle de la rotation vectorielle l, $-\varphi$ est l'angle de la rotation vectorielle l^{-1}.

EXERCICES

3. Montrer que quelles que soient les demi-droites vectorielles D, D', on a :
$$\text{angle}(D, D') = -\text{angle}(D', D).$$

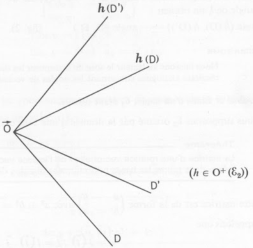
4. Montrer que quelles que soient les demi-droites vectorielles D_1, D'_1, D_2, D'_2, on a :
$$\text{angle}(D_1, D'_1) = \text{angle}(D_2, D'_2) \Longleftrightarrow \text{angle}(D_1, D_2) = \text{angle}(D'_1, D'_2).$$
5. Montrer que quelles que soient les demi-droites vectorielles D_0, D_1, D_2, on a :
$$\text{angle}(D_1, D_2) = \text{angle}(D_0, D_2) - \text{angle}(D_0, D_1).$$

Théorème.

Soient D et D' deux demi-droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$ et h une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_2$.
(i) Si $h \in O^+(\mathcal{E}_2)$ on a :
$$\text{angle}\big(h(D), h(D')\big) = \text{angle}(D, D').$$
(ii) Si $h \in O^-(\mathcal{E}_2)$ on a :
$$\text{angle}\big(h(D), h(D')\big) = -\text{angle}(D, D').$$

Notons l l'unique rotation vectorielle de $\mathcal{E}_2$ telle que $l(D) = D'$.
(i) si $h \in O^+(\mathcal{E}_2)$ on a $l \circ h = h \circ l$ car $O^+(\mathcal{E}_2)$ est commutatif.
Par suite $\qquad l(h(D)) = h(l(D)) = h(D')$
ce qui prouve que l est la rotation vectorielle transformant $h(D)$ en $h(D')$, donc que
$$\text{angle}(h(D), h(D')) = \text{angle}(D, D') \qquad \text{(fig. 1).}$$

fig. 1



(ii) si $h \in O^-(\mathcal{E}_2)$, h est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle de $\mathcal{E}_2$.
Soient $\vec{i}$ un vecteur unitaire de cette droite vectorielle et $\vec{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$; dans la base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ h a pour matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Nous noterons $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$, la matrice de l dans cette base.

Nous allons montrer que $l^{-1} = h \circ l \circ h$:
L'application $h \circ l \circ h$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & -b\\ -b & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$$

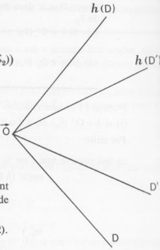


fig. 2

$(h \in O^-(\mathcal{E}_2))$

qui est la matrice de l^{-1}.
On en déduit $l^{-1} \circ h = h \circ l$, d'où

$$l^{-1}(h(D)) = h(l(D)) = h(D'),$$

et donc l^{-1} est la rotation vectorielle de $\mathcal{E}_2$ transformant $h(D)$ en $h(D')$. Comme l'angle de l^{-1} est l'opposé de l'angle de l, on obtient :

angle $(h(D), h(D')) = -$ angle (D, D') (fig. 2).

REMARQUE

Nous laissons au lecteur le soin de transposer les résultats précédents pour obtenir des résultats analogues concernant les angles de vecteurs de $\mathcal{E}_2$.

c) Cosinus et Sinus d'un angle, $\mathcal{E}_2$ étant orienté.

Nous supposons $\mathcal{E}_2$ orienté par la donnée d'une base orthonormée ordonnée $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Théorème.

La matrice d'une rotation vectorielle l de l'espace vectoriel euclidien **orienté** $\mathcal{E}_2$ est la même dans toutes les bases orthonormées directes de $\mathcal{E}_2$.

Cette matrice est de la forme $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

Rappelons que

$$a = l(\vec{i}) \,.\, \vec{j} = l(\vec{j}) \,.\, \vec{j}$$
$$b = l(\vec{i}) \,.\, \vec{j} = -l(\vec{j}) \,.\, \vec{i}.$$

Par définition, le réel a est appelé **Cosinus** de la rotation vectorielle l, on le note Cos l; le réel b est appelé **Sinus** de la rotation vectorielle l, on le note Sin l.

Nous dirons alors :

Définition.

Si φ est un élément de $\mathcal{A}$ et l la rotation vectorielle d'angle φ, on définit le **Cosinus** et le **Sinus** de l'angle φ par :

$$\text{Cos}\,\varphi = \text{Cos}\,l \quad , \quad \text{Sin}\,\varphi = \text{Sin}\,l.$$

Il en résulte que, dans un plan vectoriel euclidien orienté, un angle, comme une rotation vectorielle, est parfaitement déterminé par son Cosinus et son Sinus.

NOTATION

Lorsque $\varphi =$ angle (D, D') on écrira Cos (D, D') (resp. Sin (D, D')) au lieu de Cos angle (D, D') (resp. Sin angle (D, D')).

Nous allons montrer que

Si D et D' sont deux demi-droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$, de vecteurs directeurs unitaires $\vec{u}, \vec{u}'$, on a, en posant $\varphi =$ angle(D, D'),

$$\text{Cos}\,\varphi = \vec{u} \,.\, \vec{u}'$$
et
$$\text{Sin}\,\varphi = \vec{u}_1 \,.\, \vec{u}'$$

où $\vec{u}_1$ est l'unique vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ tel que la base orthonormée ordonnée $\{\vec{u}, \vec{u}_1\}$ soit directe.

En effet, si l est la rotation vectorielle d'angle φ, l a pour matrice dans la base orthonormée directe $\{\vec{u}, \vec{u}_1\}$:

$$\begin{pmatrix}\text{Cos}\,\varphi & -\text{Sin}\,\varphi\\ \text{Sin}\,\varphi & \text{Cos}\,\varphi\end{pmatrix}$$

d'où
$$\text{Cos}\,\varphi = l(\vec{u}) \,.\, \vec{u} = \vec{u}' \,.\, \vec{u}$$
$$\text{Sin}\,\varphi = l(\vec{u}) \,.\, \vec{u}_1 = \vec{u}' \,.\, \vec{u}_1.$$

Application :

Soient (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives de deux vecteurs non nuls $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, et $\varphi =$ angle $(\vec{v}, \vec{v}')$.

On a, si $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ et $\vec{u}' = \dfrac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|}$,

$$\text{Cos}\,\varphi = \vec{u}' \,.\, \vec{u} \quad \text{et} \quad \text{Sin}\,\varphi = \vec{u}' \,.\, \vec{u}_1.$$

Déterminons $\vec{u}_1$:

on doit avoir d'une part $\quad \vec{u} \,.\, \vec{u}_1 = 0$

et d'autre part $\quad \det_{\{\vec{i}, \vec{j}\}}(\vec{u}, \vec{u}_1) = +1,$

ce qui conduit à : $\quad \vec{u}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$

avec $\quad x x_1 + y y_1 = 0$

et
$$\begin{vmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & x_1\\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & y_1\end{vmatrix} = \frac{x y_1 - x_1 y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1,$$

d'où l'unique solution :

$$\vec{u}_1 = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{j}.$$

On obtient alors :

$$(1)\qquad \boxed{\begin{aligned} \text{Cos}\ \varphi &= \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}} \\ \text{Sin}\ \varphi &= \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}} \end{aligned}}$$

ce que l'on peut aussi écrire :

$$(2)\qquad \boxed{\begin{aligned} \text{Cos}\ \varphi &= \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}'}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{v}'\|} \\ \text{Sin}\ \varphi &= \frac{\det(\vec{v},\vec{v}')}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{v}'\|} \end{aligned}}$$

le déterminant étant relatif à une base orthonormé directe quelconque de $\mathcal{E}_2$.

EXERCICE

6. Soit $\{\vec{i},\vec{j}\}$ une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_2$. On considère les vecteurs

$$\vec{u}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\qquad \vec{u}_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{v}_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad \vec{v}_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

Montrer que $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ et $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ sont des bases orthonormées de $\mathcal{E}_2$, que l'une est directe et que l'autre ne l'est pas.

Déterminer le Cosinus et le Sinus des angles : angle $(\vec{i},\vec{u}_1)$, angle $(\vec{i},\vec{v}_1)$, angle $(\vec{j},\vec{u}_2)$, angle $(\vec{j},\vec{v}_2)$, lorsque $\mathcal{E}_2$ est orienté

(i) par la base orthonormée ordonnée $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$.

(ii) par la base orthonormée ordonnée $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$.

d) Angles remarquables.

Nous supposons toujours $\mathcal{E}_2$ orienté par une base orthonormée ordonnée $\{\vec{i},\vec{j}\}$.

1. *Angle nul.*

Nous avons défini au *b)* l'angle nul ω. On a :

$$\text{Cos}\ \omega = 1 \qquad \text{Sin}\ \omega = 0$$

puisque la matrice associée à la rotation d'angle ω, c'est-à-dire à $\text{Id}_{\mathcal{E}_2}$, est $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. *Angle plat.*

On a démontré au § 4.11.a que

l'unique rotation vectorielle involutive de $\mathcal{E}_2$, distincte de $\text{Id}_{\mathcal{E}_2}$, est $-\text{Id}_{\mathcal{E}_2}$.

On définit alors l'angle plat de la manière suivante :

Définition.
On appelle **angle plat,** et on note ϖ, l'angle de la rotation vectorielle $-\text{Id}_{\mathcal{E}_2}$.

On a donc
$$\text{Cos}\ \varpi = -1 \qquad \text{Sin}\ \varpi = 0.$$

D'après le résultat précédent :

$$\forall\, l \in O^+(\mathcal{E}_2) \qquad (l^2 = \text{Id}_{\mathcal{E}_2}) \iff (l = \text{Id}_{\mathcal{E}_2}\ \text{ ou }\ l = -\text{Id}_{\mathcal{E}_2}),$$

d'où, pour tout élément φ de $\mathcal{A}$:

$$\boxed{2\varphi = \omega \iff \varphi = \omega \ \text{ ou }\ \varphi = \varpi}$$

3. *Angles droits.*

Théorème.
Il existe deux rotations vectorielles l de $\mathcal{E}_2$ telles que $l^2 = -\text{Id}_{\mathcal{E}_2}$. Ce sont celles représentées dans une base orthonormée directe par les matrices

$$D_+ = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad D_- = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

En effet, si $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ est la matrice de l dans une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_2$, on a :

$$l^2 = -\text{Id}_{\mathcal{E}_2} \iff \begin{pmatrix}a^2-b^2 & -2ab\\ 2ab & a^2-b^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0. \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

d'où le résultat annoncé.

Définition.
$\mathcal{E}_2$ étant **orienté,** on appelle **angle droit** de sens positif (resp. négatif) et on note δ_+ (resp. δ_-) l'angle de la rotation vectorielle de matrice D_+ (resp. D_-).

On a donc :

$$\begin{cases} \text{Cos}\ \delta_+ = 0 \\ \text{Sin}\ \delta_+ = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{Cos}\ \delta_- = 0 \\ \text{Sin}\ \delta_- = -1. \end{cases}$$

Il résulte du théorème précédent que, pour tout élément φ de $\mathcal{A}$, on a :

$$\boxed{2\varphi = \varpi \iff \varphi = \delta_+ \ \text{ ou }\ \varphi = \delta_-}$$

Des formules (2) de c) on déduit :

si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont deux vecteurs unitaires orthogonaux du plan vectoriel euclidien orienté $\mathcal{E}_2$, on a :

- angle $(\vec{u},\vec{u}') = \delta_+ \iff$ la base orthonormée ordonnée $\{\vec{u},\vec{u}'\}$ est directe
- angle $(\vec{u},\vec{u}') = \delta_- \iff$ la base orthonormée ordonnée $\{\vec{u},\vec{u}'\}$ n'est pas directe.

EXERCICE

7. Montrer que l'ensemble $\{\omega, \varpi, \delta_+, \delta_-\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}$. Écrire sa table d'addition.

c) Bissectrice d'un couple de demi-droites vectorielles.

Lemme.

L'application $\varphi \longmapsto \varphi + \varphi$ de $\mathcal{A}$ dans lui-même est un homomorphisme surjectif de groupes ayant pour noyau le sous-groupe $\{\omega, \varpi\}$ de $\mathcal{A}$.

Cette application est un homomorphisme de groupes puisqu'à $\varphi_1 + \varphi_2$ correspond $(\varphi_1 + \varphi_2) + (\varphi_1 + \varphi_2)$ c'est-à-dire $(\varphi_1 + \varphi_1) + (\varphi_2 + \varphi_2)$.

- *Cet homomorphisme est surjectif.*

Soit ψ un élément de $\mathcal{A}$ et h la rotation vectorielle d'angle ψ. Nous allons montrer qu'il existe au moins une rotation vectorielle l telle que $l^2 = h$. Ceci établi, si φ est l'angle de l on aura bien $\varphi + \varphi = \psi$.

Désignons par $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}_2$ et par $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ la matrice de h dans cette base.

Une rotation vectorielle l, de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans cette base, répond à la question si et seulement si on a

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut au système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \alpha \\ 2ab = \beta \end{cases}$$

avec de plus la condition $a^2 + b^2 = 1$.
On obtient comme solutions

$$\begin{cases} a = \varepsilon\sqrt{\dfrac{1+\alpha}{2}} \\ b = \varepsilon'\sqrt{\dfrac{1-\alpha}{2}} \end{cases} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1,\ \varepsilon' = \pm 1 \text{ et } \varepsilon\varepsilon' \text{ du signe de } \beta.$$

En conclusion il existe deux rotations vectorielles l telles que $l^2 = h$; si l_1 est l'une d'elles l'autre l_2 est $-l_1$.

- *Noyau.*

Le noyau est l'image réciproque par cet homomorphisme du sous-groupe $\{\omega\}$ de $\mathcal{A}$, c'est donc le sous-groupe $\{\varphi \mid \varphi + \varphi = \omega\}$ de $\mathcal{A}$, ensemble qui d'après § 5.5.d est $\{\omega, \varpi\}$.

Si nous considérons maintenant deux demi-droites vectorielles D, D′ de $\mathcal{E}_2$ et si nous posons $\psi = \text{angle (D, D')}$, il résulte du lemme précédent qu'il existe exactement deux éléments φ_1, φ_2 de $\mathcal{A}$ tels que $\varphi_1 + \varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_2 = \psi$, ces éléments vérifiant $\varphi_2 = \varphi_1 + \varpi$.

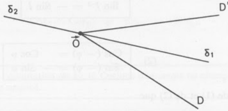
Soit δ_i la demi-droite vectorielle telle que angle $(\text{D}, \delta_i) = \varphi_i$ $(i = 1, 2)$ (fig. 3).

Comme $\quad$ angle $(\delta_i, \text{D}') =$ angle $(\text{D}, \text{D}') -$ angle (D, δ_i)

on obtient $\quad$ angle $(\delta_i, \text{D}') = \psi - \varphi_i = \varphi_i$,

donc $\quad$ angle $(\delta_i, \text{D}') =$ angle (D, δ_i).

fig. 3



Les demi-droites vectorielles δ_1, δ_2 sont évidemment les seules demi-droites vectorielles vérifiant ces égalités.
De la relation $\varphi_2 = \varphi_1 + \varpi$ on déduit que angle $(\delta_2, \delta_1) = \varphi_2 - \varphi_1 = \varpi$ et que δ_2 est l'image de δ_1 par l'application $-\text{Id}_{\mathcal{E}_2}$; donc $\delta_1 \cup \delta_2$ est une droite vectorielle de $\mathcal{E}_2$.

Théorème et définition.

Étant données deux demi-droites vectorielles D, D′ de $\mathcal{E}_2$ il existe exactement deux demi-droites vectorielles δ_1, δ_2 telles que angle $(\text{D}, \delta_i) =$ angle (δ_i, D') $(i = 1, 2)$; $\delta_1 \cup \delta_2$ est une droite vectorielle de $\mathcal{E}_2$ appelée **bissectrice** du couple (D, D′).

EXERCICE

8. Étant données deux demi-droites vectorielles D, D′ de $\mathcal{E}_2$ montrer que pour toute demi-droite vectorielle δ on a angle $(\text{D}, \delta) =$ angle (δ, D') si et seulement si D′ est l'image de D par la symétrie orthogonale ayant pour base la droite vectorielle contenant δ.
En déduire que la bissectrice de (D, D′) est la base de l'unique symétrie orthogonale vectorielle axiale de $\mathcal{E}_2$ échangeant D et D′.

Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{E}_2$ on appelle bissectrice du couple $(\vec{u}, \vec{u}')$ la droite vectorielle bissectrice du couple des demi-droites vectorielles qu'ils déterminent.

f) Formules d'addition.

Soient l et l' deux rotations vectorielles du plan vectoriel euclidien **orienté** $\mathcal{E}_2$. En calculant le produit des matrices

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}\, l & -\text{Sin}\, l \\ \text{Sin}\, l & \text{Cos}\, l \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \text{Cos}\, l' & -\text{Sin}\, l' \\ \text{Sin}\, l' & \text{Cos}\, l' \end{pmatrix},$$

on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Cos}\,(l \circ l') &= \text{Cos}\, l\,.\,\text{Cos}\, l' - \text{Sin}\, l\,.\,\text{Sin}\, l' \\ \text{Sin}\,(l \circ l') &= \text{Sin}\, l\,.\,\text{Cos}\, l' + \text{Cos}\, l\,.\,\text{Sin}\, l' \end{aligned}}$$

ce qui donne, pour les angles φ, φ' de l et l' :

$$(1) \quad \boxed{\begin{aligned} \text{Cos}\,(\varphi + \varphi') &= \text{Cos}\,\varphi\,.\,\text{Cos}\,\varphi' - \text{Sin}\,\varphi\,.\,\text{Sin}\,\varphi' \\ \text{Sin}\,(\varphi + \varphi') &= \text{Sin}\,\varphi\,.\,\text{Cos}\,\varphi' + \text{Cos}\,\varphi\,.\,\text{Sin}\,\varphi' \end{aligned}}$$

On sait que l'inverse d'une matrice orthogonale d'ordre 2 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est la matrice transposée $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

On en déduit :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Cos} l^{-1} &= \operatorname{Cos} l \\ \operatorname{Sin} l^{-1} &= -\operatorname{Sin} l \end{aligned}}$$

et

$$(2) \quad \boxed{\begin{aligned} \operatorname{Cos}(-\varphi) &= \operatorname{Cos} \varphi \\ \operatorname{Sin}(-\varphi) &= -\operatorname{Sin} \varphi \end{aligned}}$$

Il résulte de (1) et de (2) que

$$(3) \quad \boxed{\begin{aligned} \operatorname{Cos}(\varphi - \varphi') &= \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Cos} \varphi' + \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} \varphi' \\ \operatorname{Sin}(\varphi - \varphi') &= \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \varphi' - \operatorname{Cos} \varphi \operatorname{Sin} \varphi' \end{aligned}}$$

REMARQUE IMPORTANTE

Nous ne reprendrons pas l'étude de la mesure des angles ni celle des fonctions circulaires, qui ont toutes deux été faites en détail en Première. Bien sûr, nous supposerons connus tous les résultats qui y sont relatifs et que le lecteur trouvera dans le chapitre 15 du livre de Première (tome 2).

Insistons toutefois sur le fait que, pour parler de « **mesure des angles** » il est absolument nécessaire d'**orienter** le plan vectoriel euclidien que l'on utilise. En effet, on a admis en Première l'existence d'une application θ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}$ jouissant de certaines propriétés (cf. livre de Première, tome 2, § 15.1 b); cette existence provient des résultats suivants :

(i) comme $\mathcal{E}_2$ est orienté, il existe un isomorphisme canonique du groupe multiplicatif $(\mathbb{U}, \times)$ des nombres complexes de module 1 sur le groupe $O^+(\mathcal{E}_2)$, cet isomorphisme étant celui qui au complexe $a + ib$ (avec $a^2 + b^2 = 1$) associe la rotation vectorielle ayant pour matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe quelconque de $\mathcal{E}_2$.

(ii) il existe, nous l'admettrons, un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{U}, \times)$.

Alors c'est en composant cet homomophisme avec l'isomorphisme précédent que l'on obtient un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $O^+(\mathcal{E}_2)$, autrement dit un homomorphisme (celui noté θ) de $(\mathbb{R}, +)$ sur $\mathcal{A}$.

g) Changement d'orientation de $\mathcal{E}_2$.

Nous avons supposé dans les paragraphes c, d, e, que $\mathcal{E}_2$ était orienté. Nous nous proposons d'étudier l'influence d'un changement d'orientation de $\mathcal{E}_2$.

Soient B, B' deux bases orthonormées ordonnées de $\mathcal{E}_2$ non équivalentes; nous désignerons par Cos_B et Sin_B (resp. $\operatorname{Cos}_{B'}$ et $\operatorname{Sin}_{B'}$) les applications Cosinus et Sinus associées à l'orientation de $\mathcal{E}_2$ définie par B (resp. B').

Si une rotation vectorielle l a pour matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans la base B (et dans tout autre base équivalente) elle a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ dans la base B' (et dans toute autre base équivalente), puisque si $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ la base $\{\vec{i}, -\vec{j}\}$ est équivalente à B' et que l a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ dans la base $\{\vec{i}, -\vec{j}\}$.

Il en résulte que :

$$\operatorname{Cos}_B = \operatorname{Cos}_{B'} \quad \text{et} \quad \operatorname{Sin}_B = -\operatorname{Sin}_{B'}.$$

Autrement dit :

Si on change l'orientation de $\mathcal{E}_2$, le Cosinus d'un angle ne change pas et le Sinus est changé en son opposé.

5. 6 GROUPE DES ANGLES DE DROITES VECTORIELLES DE $\mathcal{E}_2$

a) Angle de deux droites vectorielles.

Soient Δ et Δ' deux droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$, $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ les vecteurs unitaires directeurs de Δ, $\vec{u}'$ et $-\vec{u}'$ les vecteurs unitaires directeurs de Δ'.

Notons
$$\varphi_1 = \text{angle}(\vec{u}, \vec{u}')$$
$$\varphi_2 = \text{angle}(\vec{u}, -\vec{u}')$$
$$\varphi_3 = \text{angle}(-\vec{u}, \vec{u}')$$
$$\varphi_4 = \text{angle}(-\vec{u}, -\vec{u}').$$

Si l est l'unique rotation vectorielle telle que $l(\vec{u}) = \vec{u}'$, on a

$$l(-\vec{u}) = -\vec{u}' \quad , \quad \text{d'où } \varphi_4 = \varphi_1$$
$$(-\operatorname{Id}_{\mathcal{E}_2} \circ l)(\vec{u}) = -\vec{u}' \quad , \quad \text{d'où } \varphi_2 = \varpi + \varphi_1$$
$$l \circ (-\operatorname{Id}_{\mathcal{E}_2})(-\vec{u}) = \vec{u}' \quad , \quad \text{d'où } \varphi_3 = \varphi_1 + \varpi.$$

En conclusion on peut associer au couple (Δ, Δ') deux éléments de $\mathcal{A}$: si φ est l'un d'entre eux (i.e. l'angle de deux vecteurs directeurs de Δ et Δ') l'autre est $\varphi + \varpi$.

Alors si l est la rotation d'angle φ, la rotation d'angle $\varphi + \varpi$ est $l \circ (-\operatorname{Id}_{\mathcal{E}_2})$ c'est-à-dire $-l$. On peut donc exprimer le résultat précédent, en termes de rotations de la manière suivante :

Théorème.
Si Δ et Δ' sont deux droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$ il existe deux rotations vectorielles transformant Δ en Δ'. Si l est l'une d'elles, l'autre est $-l$.

Ainsi à un couple de droites vectorielles, nous associons une paire d'angles de demi-droites vectorielles. C'est cette paire que l'on va considérer comme étant l'angle du couple des deux droites. Mais nous allons maintenant retrouver l'ensemble de ces paires d'une manière qui nous permettra de le munir d'une opération très utile.

Rappelons (cf. § 5.5 e) :

L'ensemble $\{\omega, \varpi\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}$. Plus précisément, $\{\omega, \varpi\}$ est le noyau de l'homomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ \varphi &\longmapsto \varphi + \varphi. \end{aligned}$$

Considérons dans $\mathcal{A}$ la relation

$$\varphi \sim \varphi' \Longleftrightarrow \varphi - \varphi' \in \{\omega, \varpi\}.$$

Elle est évidemment réflexive, puisque $\varphi - \varphi = \omega$, symétrique puisque

$$\varphi - \varphi' \in \{\omega, \varpi\} \Longleftrightarrow \varphi' - \varphi \in \{\omega, \varpi\},$$

et transitive car

$$\varphi - \varphi' \in \{\omega, \varpi\} \quad \text{et} \quad \varphi' - \varphi'' \in \{\omega, \varpi\}$$

impliquent que

$$\varphi - \varphi'' = (\varphi - \varphi') + (\varphi' - \varphi'') \in \{\omega, \varpi\}$$

puisque $\{\omega, \varpi\}$ est un sous-groupe.
C'est donc une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$.

Théorème et définition.

Dans $\mathcal{A}$ la relation

$$\text{« } \varphi \sim \varphi' \Longleftrightarrow \varphi - \varphi' \in \{\omega, \varpi\} \text{ »}$$

est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient $\mathcal{A}/_\sim$, noté $\mathcal{A}'$, est appelé **ensemble des angles de droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$.**

Si Δ et Δ' sont deux droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$ et si φ et $\varphi + \varpi$ sont les éléments de $\mathcal{A}$ associés au couple (Δ, Δ') on appelle angle de Δ et de Δ', et on note angle (Δ, Δ'), la classe dans $\mathcal{A}'$ de φ (et de $\varphi + \varpi$). Nous noterons cette classe $\dot\varphi$. Donc angle (Δ, Δ') est la classe dans $\mathcal{A}'$ de l'angle de deux vecteurs directeurs quelconques de Δ et Δ'.

EXERCICE

1. Étant donnés une droite vectorielle Δ de $\mathcal{E}_2$ et un élément $\dot\varphi$ de $\mathcal{A}'$, montrer qu'il existe une et une seule droite vectorielle Δ' telle que angle $(\Delta, \Delta') = \dot\varphi$.

b) Structure de groupe abélien de $\mathcal{A}'$.

Théorème.

La relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{A}$ est compatible avec la loi de groupe de $\mathcal{A}$.

Considérons deux couples (φ_1', φ_2), (φ_1', φ_2') d'éléments de $\mathcal{A}$ et supposons que l'on ait

$$\varphi_1 \sim \varphi_1' \quad \text{et} \quad \varphi_2 \sim \varphi_2'.$$

On a donc :

$$\varphi_1 - \varphi_1' \in \{\omega, \varpi\} \quad \text{et} \quad \varphi_2 - \varphi_2' \in \{\omega, \varpi\};$$

on en déduit

$$(\varphi_1 - \varphi_1') + (\varphi_2 - \varphi_2') \in \{\omega, \varpi\},$$

ce qui s'écrit encore

$$(\varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_1' + \varphi_2') \in \{\omega, \varpi\},$$

ou bien

$$\varphi_1 + \varphi_2 \sim \varphi_1' + \varphi_2'.$$

Ceci nous permet de définir une loi, que nous noterons également $+$, sur $\mathcal{A}'$, en posant

$$\dot\varphi_1 + \dot\varphi_2 = \dot{\overline{\varphi_1 + \varphi_2}},$$

φ_1 et φ_2 étant deux représentants quelconques de $\dot\varphi_1$ et $\dot\varphi_2$.
Alors l'application canonique $\varphi \longmapsto \dot\varphi$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$ est un homomorphisme surjectif de $\mathcal{A}$, muni de la loi $+$, sur $\mathcal{A}'$, muni de la loi $+$ précédemment définie, et la loi dont on a muni $\mathcal{A}'$ est la seule pour laquelle cette application est un homomorphisme.
$(\mathcal{A}, +)$ étant un groupe, son image $(\mathcal{A}', +)$ par cet homomorphisme est aussi un groupe.

Concluons :

Théorème et définition.

L'ensemble $\mathcal{A}'$ peut être muni d'une unique structure de groupe abélien pour laquelle l'application $\varphi \longmapsto \dot\varphi$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$ est un homomorphisme de groupes.
$\mathcal{A}'$ muni de cette structure est appelé **groupe des angles de droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$.**

L'angle nul de $\mathcal{A}'$ est la classe $\dot\omega$ de ω dans $\mathcal{A}'$.

EXERCICE

2. Montrer que si $\Delta, \Delta', \Delta''$, sont trois droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$, on a dans $\mathcal{A}'$ la « relation de Chasles » :

$$\text{angle } (\Delta, \Delta') + \text{angle } (\Delta', \Delta'') = \text{angle } (\Delta, \Delta'').$$

3. Soient Δ et Δ' deux droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$ et h une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_2$.
Si $h \in O^+(\mathcal{E}_2)$ montrer que, dans $\mathcal{A}'$,
$$\text{angle } (h(\Delta), h(\Delta')) = \text{angle } (\Delta', \Delta').$$
Si $h \in O^-(\mathcal{E}_2)$ montrer que, dans $\mathcal{A}'$,
$$\text{angle } (h(\Delta), h(\Delta')) = -\text{ angle } (\Delta, \Delta').$$

Isomorphisme canonique de $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{A}$.

Nous avons vu que le noyau de l'homomorphisme $\varphi \longmapsto \varphi + \varphi$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ est le sous-groupe $\{\omega, \varpi\}$ de $\mathcal{A}$. Autrement dit, étant donnés deux éléments φ_1, φ_2 de $\mathcal{A}$ on a les équivalences

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_2 &\Longleftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 \in \{\omega, \varpi\} \\ &\Longleftrightarrow \varphi_1 \sim \varphi_2 \\ &\Longleftrightarrow \dot\varphi_1 = \dot\varphi_2. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on peut définir une application μ de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ en associant à un élément $\dot\varphi$ de $\mathcal{A}'$ l'élément $\varphi + \varphi$ de $\mathcal{A}$, φ étant un représentant quelconque de $\dot\varphi$.
Comme nous venons de le voir cette application est injective.
Le fait qu'elle soit surjective résulte du lemme suivant démontré au § 5.5.*e*.

Lemme.

L'homomorphisme $\varphi \longmapsto \varphi + \varphi$ de $\mathcal{A}$ dans lui-même est surjectif.

On obtient finalement que l'application

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A}' &\longrightarrow \mathcal{A} \\ \dot\varphi &\longmapsto \varphi + \varphi \end{aligned}$$

est bijective.

Cette application est un homomorphisme puisqu'à $\dot\varphi_1 + \dot\varphi_2$ (qui est égal à $\dot{\overline{\varphi_1 + \varphi_2}}$) correspond $(\varphi_1 + \varphi_2) + (\varphi_1 + \varphi_2)$ c'est-à-dire $(\varphi_1 + \varphi_1) + (\varphi_2 + \varphi_2)$, on a donc bien

$$\mu(\dot\varphi_1 + \dot\varphi_2) = \mu(\dot\varphi_1) + \mu(\dot\varphi_2).$$

L'application μ étant alors un homomorphisme bijectif de $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{A}$, est un isomorphisme.

Théorème.

L'application

$$\mu : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$\dot\varphi \longmapsto \varphi + \varphi$$

est un isomorphisme de groupes de $(\mathcal{A}', +)$ sur $(\mathcal{A}, +)$.

Interprétation géométrique.

Soient Δ et Δ' deux droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$ et $\dot\varphi = \text{angle}\,(\Delta, \Delta')$.
On note s et s' les symétries orthogonales par rapport à Δ et Δ' respectivement.
Nous savons que $s' \circ s$ est une rotation vectorielle l de $\mathcal{E}_2$, et nous nous proposons de déterminer l'angle de l.
Désignons par $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs unitaires directeurs de Δ et Δ' et par φ l'angle de $\vec{u}$ et de $\vec{u}'$, lequel est un représentant de $\dot\varphi$.
L'angle ψ de la rotation vectorielle l est alors égal à angle $(\vec{u}, s' \circ s(\vec{u}))$.

Or $\qquad s(\vec{u}) = \vec{u}, \quad$ donc $\quad \psi = \text{angle}\,(\vec{u}, s'(\vec{u}))$.

Ceci peut s'écrire

$$\psi = \text{angle}\,(\vec{u}, \vec{u}') + \text{angle}\,(\vec{u}', s'(\vec{u}))$$

et, puisque $s'(\vec{u}') = \vec{u}'$,

$$\psi = \text{angle}\,(\vec{u}, \vec{u}') + \text{angle}\,(s'(\vec{u}'), s'(\vec{u})).$$

Comme $s' \in O^-(\mathcal{E}_2)$, on a

$$\text{angle}\,(s'(\vec{u}'), s'(\vec{u})) = -\,\text{angle}\,(\vec{u}', \vec{u}) \qquad \text{(cf. § 5.5.b)}$$
$$= \text{angle}\,(\vec{u}, \vec{u}'),$$

ce qui conduit à

$$\psi = \text{angle}\,(\vec{u}, \vec{u}') + \text{angle}\,(\vec{u}, \vec{u}')$$
$$= \varphi + \varphi$$
$$= \mu(\dot\varphi).$$

En conclusion on peut énoncer :

Théorème.

La composée $s' \circ s$ de deux symétries orthogonales s', s par rapport à des droites vectorielles Δ, Δ' de $\mathcal{E}_2$, est une rotation vectorielle qui a pour angle $\mu(\dot\varphi)$, $\dot\varphi$ étant l'angle de Δ et de Δ'.

c) Bissectrices d'un couple de droites vectorielles.

Soient Δ et Δ' deux droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$ et $\dot\varphi = \text{angle}\,(\Delta, \Delta')$.
Nous nous proposons de chercher s'il existe un élément $\dot\psi$ de $\mathcal{A}'$ tel que $\dot\psi + \dot\psi = \dot\varphi$.
En utilisant l'isomorphisme μ de $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{A}$ qui à $\dot\varphi$ fait correspondre $\varphi + \varphi$, cette égalité est équivalente à l'équation

$$\psi + \psi + \psi + \psi = \varphi + \varphi$$

qu'il s'agit de résoudre dans $\mathcal{A}$.
D'après le lemme du paragraphe *b*), on sait que, étant donné φ, il existe au moins un angle ψ_1 tel que $\psi_1 + \psi_1 = \varphi$; on a alors $\psi_1 + \psi_1 + \psi_1 + \psi_1 = \varphi$ et donc $\dot\psi_1$ est une solution de l'équation $\dot\psi + \dot\psi = \dot\varphi$.
Si $\dot\psi$ est une autre solution, on a

$$\psi + \psi + \psi + \psi = \psi_1 + \psi_1 + \psi_1 + \psi_1,$$

autrement dit $[(\psi - \psi_1) + (\psi - \psi_1)] + [(\psi - \psi_1) + (\psi - \psi_1)] = \omega$, ce qui implique

$$(\psi - \psi_1) + (\psi - \psi_1) = \omega \text{ ou } \varpi$$

c'est-à-dire $\qquad \psi - \psi_1 \in \{\omega, \varpi, \delta_+, \delta_-\}$.

Par suite on obtient $\qquad \dot\psi - \dot\psi_1 = \dot\omega \text{ ou } \dot\delta_+$

(car δ_- étant égal à $\delta_+ + \varpi$ on a $\dot\delta_+ = \dot\delta_-$), donc

$$\dot\psi = \dot\psi_1 \quad \text{ou} \quad \dot\psi = \dot\psi_1 + \dot\delta_+.$$

Comme $\dot\psi_2 = \dot\psi_1 + \dot\delta_+$ est manifestement solution de l'équation $\dot\psi + \dot\psi = \dot\varphi$, nous avons établi que cette équation a exactement deux solutions : $\dot\psi_1$ et $\dot\psi_2$.

Théorème.

Étant donné un élément $\dot\varphi$ de $\mathcal{A}'$, il existe exactement deux éléments $\dot\psi_1$, $\dot\psi_2$ de $\mathcal{A}'$ tels que $\dot\psi_1 + \dot\psi_1 = \dot\psi_2 + \dot\psi_2 = \dot\varphi$. De plus on a $\dot\psi_2 = \dot\psi_1 + \dot\delta_+$.

Alors si Δ et Δ' sont deux droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$ et si $\dot\varphi = \text{angle}\,(\Delta, \Delta')$ il existe exactement deux droites vectorielles Δ_1, Δ_2 telles que

$$\text{angle}\,(\Delta, \Delta_1) = \text{angle}\,(\Delta_1, \Delta')$$
et
$$\text{angle}\,(\Delta, \Delta_2) = \text{angle}\,(\Delta_2, \Delta').$$

En effet on doit avoir

$$\text{angle}\,(\Delta, \Delta_1) + \text{angle}\,(\Delta, \Delta_1) = \dot\varphi$$
et
$$\text{angle}\,(\Delta, \Delta_2) + \text{angle}\,(\Delta, \Delta_2) = \dot\varphi$$

c'est-à-dire

$$\text{angle}\,(\Delta, \Delta_1) = \dot\psi_1$$
$$\text{angle}\,(\Delta, \Delta_2) = \dot\psi_2.$$

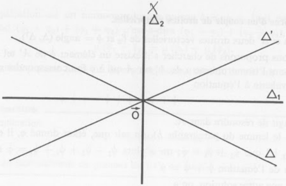
Théorème et définition.

Étant données deux droites vectorielles Δ, Δ' de $\mathcal{E}_2$ il existe deux droites vectorielles Δ_1, Δ_2 telles que

$$\text{angle}\,(\Delta, \Delta_1) = \text{angle}\,(\Delta_1, \Delta')$$
et
$$\text{angle}\,(\Delta, \Delta_2) = \text{angle}\,(\Delta_2, \Delta').$$

Les droites Δ_1, Δ_2 sont **les bissectrices** du couple de droites (Δ, Δ').

fig. 4



Comme $\dot\psi_2 = \dot\psi_1 + \delta_+$ les droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales (fig. 4).

REMARQUE

Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont deux vecteurs directeurs de Δ et de Δ' l'ensemble des bissectrices du couple (Δ, Δ') est constitué de la bissectrice du couple $(\vec{u}, \vec{u}')$ et de la bissectrice du couple $(\vec{u}, -\vec{u}')$.

En effet si $\vec{v}_1$ est un vecteur directeur de la bissectrice de $(\vec{u}, \vec{u}')$ et $\vec{v}_2$ un vecteur directeur de la bissectrice de $(\vec{u}, -\vec{u}')$ on a, en posant

$\varphi = \text{angle}(\vec{u}, \vec{u}')$ (φ est un représentant de $\dot\varphi$),

$\psi_1 = \text{angle}(\vec{u}, \vec{v}_1)$,

$\varphi_2 = \text{angle}(\vec{u}, \vec{v}_2)$,

les égalités

$$\psi_1 + \psi_1 = \varphi$$

et

$$\psi_2 + \psi_2 = \text{angle}(\vec{u}, -\vec{u}') = \text{angle}(\vec{u}, \vec{u}') + \text{angle}(\vec{u}', -\vec{u}') = \varphi + \varpi$$

d'où

$$\dot\psi_1 + \dot\psi_1 = \dot\varphi$$
$$\dot\psi_2 + \dot\psi_2 = \dot\varphi.$$

EXERCICES

4. Montrer que les bissectrices Δ_1, Δ_2 du couple de droites vectorielles (Δ, Δ') sont les bases des deux symétries orthogonales vectorielles axiales de $\mathcal{E}_2$ échangeant Δ et Δ'.
5. On dit que deux couples de droites vectorielles (Δ_1, Δ'_1) et (Δ_2, Δ'_2) sont isogonaux s'ils ont les mêmes bissectrices. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait angle (Δ_1, Δ_2) = angle (Δ'_2, Δ'_1).

d) Mesure des angles de droites vectorielles.

Nous supposons le plan vectoriel euclidien $\mathcal{E}_2$ orienté.

On a construit en Première (cf. t. 2, § 15.2 a) le groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ des nombres réels modulo 2π. Dans $\mathbb{R}$, la relation

$$\text{« il existe } k \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad x - x' = k\pi \text{ »}$$

c'est-à-dire la congruence modulo π, permet de construire de manière analogue le groupe abélien $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ des nombres réels modulo π.

Lemme.

On définit une application η de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ en associant à la classe du réel x dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ la classe de $2x$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et cette application est un isomorphisme de groupes.

En effet si x_1 et x_2 sont deux représentants d'une même classe de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, on a

$$x_1 - x_2 = k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z};$$

par suite $2x_1 - 2x_2 = 2k\pi$, ce qui montre que $2x_1$ et $2x_2$ ont même classe dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

On a donc bien défini une application.

Cette application est un homomorphisme de groupes puisqu'à la somme des classes de x et de x' (qui est la classe de $x + x'$) correspond la classe de $2(x + x') = 2x + 2x'$ qui est la somme des classes de $2x$ et de $2x'$.

De même, nous laissons le lecteur vérifier que l'on définit un homomorphisme ν de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ en associant à la classe de y dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la classe de $\frac{y}{2}$ dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

On a alors
$$\nu \circ \eta = \text{Id}_{\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \eta \circ \nu = \text{Id}_{\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}}$$

par suite η et ν sont des isomorphismes de groupes.

Théorème et définition.

Il existe un isomorphisme θ' du groupe abélien $(\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, +)$ sur le groupe abélien $(\mathcal{A}', +)$.

L'élément de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ associé, par θ'^{-1}, à un angle de $\mathcal{A}'$ est appelé mesure de cet angle.

Nous avons construit dans ce cours

- un isomorphisme
$$\eta : \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$
$$\text{classe}(x) \longmapsto \text{classe}(2x).$$

- un isomorphisme
$$\mu : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$\dot\varphi \longmapsto \dot\varphi + \dot\varphi.$$

On a admis en Première, et nous continuerons de l'admettre, l'existence d'un homomorphisme θ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}$ permettant d'en déduire un isomorphisme de $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ sur $(\mathcal{A}, +)$, isomorphisme que nous noterons $\bar\theta$ et qui à la classe du réel x dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ associe $\theta(x)$.

Alors l'application $\theta' = \mu^{-1} \circ \bar\theta \circ \eta$ obtenue par la composition suivante

$$\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\bar\theta} \mathcal{A} \xrightarrow{\mu^{-1}} \mathcal{A}'$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{A}'$, puisque composée d'isomorphismes.

Explicitons cet isomorphisme :

- à la classe de x dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, η associe la classe de $2x$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$;
- à la classe de $2x$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\bar\theta$ associe $\theta(2x)$, c'est-à-dire $\theta(x) + \theta(x)$;
- à $\theta(x) + \theta(x) = \mu(\theta(x))$, μ^{-1} associe évidemment $\theta(x)$.

En conclusion θ' est l'application de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{A}'$ qui à la classe du réel x dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ associe $\theta(x)$.

La mesure de l'angle des droites vectorielles Δ, Δ' de $\mathcal{E}_2$ sera notée $\widehat{(\Delta, \Delta')}$; c'est une classe d'équivalence de réels modulo π.
On a donc

$$\widehat{(\Delta, \Delta')} = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ \theta(x) = \text{angle}(\Delta, \Delta')\}.$$

Un représentant quelconque de $\widehat{(\Delta, \Delta')}$ est une **détermination** de la mesure de l'angle de Δ et Δ'. Le représentant appartenant à $[0, \pi[$ est appelé **la détermination principale.**

REMARQUE

Si x_1 et x_2 sont deux déterminations de $\widehat{(\Delta, \Delta')}$ on a

$$x_2 = x_1 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

d'où

$$\text{tg}\, x_2 = \text{tg}\, x_1.$$

Réciproquement, si x_1 et x_2 sont deux réels tels que $\text{tg}\, x_2 = \text{tg}\, x_1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x_2 = x_1 + k\pi.$$

Par suite un angle de droites est parfaitement déterminé par la tangente d'une détermination de sa mesure.

5. 7 ANGLES DANS $\mathcal{E}_n$, $n > 2$

a) Angle de deux demi-droites vectorielles de $\mathcal{E}_n$, $n > 2$.

Définition.

Soient D et D' deux demi-droites vectorielles de $\mathcal{E}_n$, de vecteurs directeurs unitaires $\vec{u}$, $\vec{u}'$.

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont linéairement indépendants on appelle angle de D et D', et on note angle (D, D'), leur angle dans le plan vectoriel les contenant.

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont linéairement dépendants on a soit $\vec{u} = \vec{u}'$ auquel cas on dit que l'angle de D et de D' est l'angle nul, soit $\vec{u}' = -\vec{u}$ auquel cas on dit que l'angle de D et de D' est l'angle plat.

Remarquons que lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont linéairement dépendants nous faisons un abus de langage en disant que l'angle de D et de D' est nul lorsque $\vec{u} = \vec{u}'$ et plat lorsque $\vec{u}' = -\vec{u}$. En fait, dans ce cas, cela signifie que dans tout plan vectoriel contenant D et D' leur angle est nul lorsque $\vec{u} = \vec{u}'$ et plat lorsque $\vec{u}' = -\vec{u}$.

REMARQUE

Nous définissons de même l'angle de deux vecteurs non nuls de $\mathcal{E}_n$ comme étant l'angle des demi-droites vectorielles qu'ils déterminent.

On a vu au § 5.5 b que lorsque D et D' étaient des demi-droites vectorielles d'un plan vectoriel euclidien $\mathcal{E}_2$ leur angle était un invariant du groupe $O^+(\mathcal{E}_2)$ puisque $\forall h \in O^+(\mathcal{E}_2)$ on avait

$$\text{angle}(h(D), h(D')) = \text{angle}(D, D').$$

Considérons maintenant deux demi-droites vectorielles D, D' de $\mathcal{E}_n$ $(n > 2)$; nous supposerons que leur angle n'est ni l'angle nul ni l'angle plat. Dans ce cas il existe un unique plan vectoriel contenant D et D', nous le noterons P.
Alors si on note G le sous-groupe de $O^+(\mathcal{E}_n)$ constitué des transformations orthogonales positives de $\mathcal{E}_n$ laissant P globalement invariant, l'angle de D et de D' n'est pas un invariant de G. En effet il existe des éléments de G dont les restrictions à P soient des éléments de $O^-(P)$ (c'est le cas, si $n = 3$, d'un retournement ayant pour axe une droite vectorielle contenue dans P), et si g est un tel élément on a

$$\text{angle}(g(D), g(D')) = -\text{angle}(D, D').$$

Par conséquent, étant données les deux demi-droites D et D' l'ensemble

$$\{\text{angle}(D, D'), -\text{angle}(D, D')\}$$

est un invariant du groupe G.

Nous avons défini au § 5.5 c le Cosinus de l'angle de D et de D' lorsque P est orienté, et montré au § 5.5. g que ce Cosinus est indépendant de l'orientation de P. Ceci nous permet donc, sans avoir à orienter P, de définir **le Cosinus de l'angle de D et de D'.**
Comme d'autre part on a

$$\text{Cos}(-\text{angle}(D, D')) = \text{Cos}(\text{angle}(D, D')),$$

le Cosinus de l'angle de D et de D' est un invariant du groupe G.
On aura, en particulier, pour tout couple $(\vec{v}, \vec{v}')$ de vecteurs de $\mathcal{E}_n$:

$$\boxed{\text{Cos}(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}'\|}}$$

EXERCICE

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont les vecteurs unitaires directeurs de D et de D', on a donc

$$\text{Cos}(D, D') = \vec{u} \cdot \vec{u}'.$$

En déduire que Cos (D, D') est un invariant de $O(\mathcal{E}_n)$.

REMARQUE

Nous ne pouvons définir le Sinus de l'angle de D et de D' que si nous orientons P. Or si dans un plan vectoriel euclidien $\mathcal{E}_2$ une orientation de $\mathcal{E}_2$ est un invariant du groupe $O^+(\mathcal{E}_2)$, bien au contraire dans un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_n$ de dimension strictement supérieure à 2 une orientation de P n'est pas un invariant du sous-groupe G de $O^+(\mathcal{E}_n)$ précédemment défini. En effet :

- si $\mathcal{B}$ est l'ensemble des bases orthonormées ordonnées de $\mathcal{E}_2$, $O^+(\mathcal{E}_2)$ opère sur $\mathcal{B}$, et lorsque $\mathcal{E}_2$ est orienté $O^+(\mathcal{E}_2)$ admet comme partie invariante le sous-ensemble de $\mathcal{B}$ constitué des bases orthonormées directes de $\mathcal{E}_2$ (puisque l'image par une transformation orthogonale positive d'une base orthonormée directe est une base orthonormée directe);
- tandis que dans $\mathcal{E}_n$, si P est orienté, on sait qu'il existe des éléments de G dont les restrictions à P soient des éléments de $O^-(P)$ et donc qui transforment une base orthonormée directe de P en des bases orthonormées de P qui ne sont pas directes.

Par suite, ni une orientation de P ni le Sinus de l'angle de D et de D' alors défini ne sont des invariants de G.

Cas particulier important.

Supposons que $n = 3$ et considérons une rotation vectorielle l de $\mathcal{E}_n$ d'axe F. Nous avons vu au § 4.12 *b* que la restriction de l au plan vectoriel $F^\perp$ est une rotation vectorielle de ce plan.
On appellera alors angle de la rotation vectorielle l, l'angle φ de la rotation vectorielle $l|_{F^\perp}$ de $F^\perp$; ceci ne nécessite pas d'orienter $\mathcal{E}_3$.
Cependant il peut être commode, lorsque $\mathcal{E}_3$ est orienté, d'orienter l'axe F et le plan $F^\perp$ de sorte que l'orientation de $F^\perp$ soit compatible avec celle de F; dans ces conditions si

$\widehat{\varphi}$ est la mesure de φ ($\widehat{\varphi} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) l est parfaitement déterminée par son axe orienté F et la mesure $\widehat{\varphi}$ de son angle, on dit alors par abus de langage : l est la rotation vectorielle d'axe F et d'angle $\widehat{\varphi}$, au lieu de dire « d'angle φ dont la mesure est $\widehat{\varphi}$ ». On fait d'ailleurs souvent un second abus de langage en remplaçant $\widehat{\varphi}$ par une de ses déterminations.

b) Angle de deux droites vectorielles de $\mathcal{E}_n$, $n > 2$.

Définition.

Soient Δ et Δ' deux droites vectorielles de $\mathcal{E}_n$, $n > 2$.
Lorsque Δ et Δ' sont distinctes on appelle angle de Δ et de Δ' leur angle dans le plan vectoriel les contenant.
Lorsque Δ et Δ' sont confondues on dit que leur angle est nul.

c) Angle de deux plans vectoriels de $\mathcal{E}_3$.

Définition.

Étant donnés deux plans P_1, P_2 de $\mathcal{E}_3$ on appelle angle de P_1 et de P_2, et on note angle (P_1, P_2), l'angle des droites vectorielles $P_1^{\perp}$ et $P_2^{\perp}$.

Supposons P_1 et P_2 distincts et notons Δ la droite vectorielle $P_1 \cap P_2$.
Alors l'angle de P_1 et de P_2 est un élément du groupe des angles de droites du plan vectoriel euclidien $\Delta^{\perp}$.

EXERCICE

2. Soit Δ_i la droite vectorielle $P_i \cap \Delta^{\perp}$, $i = 1, 2$.
Montrer que l'on a angle : $(P_1, P_2) =$ angle (Δ_1, Δ_2).

Théorème.

La composée $s_2 \circ s_1$ de deux symétries orthogonales s_1, s_2 par rapport à des plans vectoriels P_1, P_2 de $\mathcal{E}_3$ est une rotation vectorielle qui

(i) si $P_1 = P_2$, est l'identité.
(ii) si $P_1 \neq P_2$, a pour axe $P_1 \cap P_2$ et pour angle $\mu(\phi)$, ϕ étant l'angle de P_1 et de P_2.

En effet, si $P_1 = P_2$, $s_2 = s_1$ donc $s_2 \circ s_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}$.
Sinon $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle Δ et $s_2 \circ s_1$ est une rotation vectorielle d'axe Δ (fig. 5).

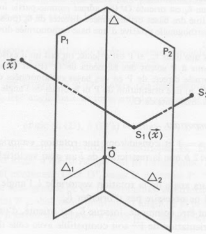


fig. 5

L'angle de $s_2 \circ s_1$ est l'angle de la rotation vectorielle $s_2 \circ s_1 \mid_{\Delta^{\perp}}$ de $\Delta^{\perp}$.
Si nous notons Δ_i la droite vectorielle $P_i \cap \Delta^{\perp}$, $i = 1, 2$, la restriction de $s_2 \circ s_1$ à $\Delta^{\perp}$ est $\sigma_2 \circ \sigma_1$ où σ_i est, dans $\Delta^{\perp}$, la symétrie orthogonale par rapport à Δ_i.
On sait que l'angle de $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est $\mu(\phi)$ où $\phi =$ angle (Δ_1, Δ_2) (cf. § 5.6 *b*), et comme angle $(\Delta_1, \Delta_2) =$ angle (P_1, P_2) notre assertion est démontrée.

III. Produit vectoriel dans $\mathcal{E}_3$ orienté

Nous allons donner deux présentations de cette notion. La première utilise une construction du produit vectoriel. La seconde le définit par une propriété caractéristique, qui utilise la notion de déterminant et une propriété extrêmement importante des formes linéaires sur un espace vectoriel euclidien.

5. 8 PREMIÈRE PRÉSENTATION

On désigne par $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_3$.

a) Définitions équivalentes.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathcal{E}_3$ et P un plan vectoriel les contenant (lequel est unique lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants).
Orientons P arbitrairement et désignons par $\vec{h}$ le vecteur unitaire de la demi-normale positive de P. Alors, le vecteur $\vec{w} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \mathrm{Sin}(\vec{u}, \vec{v}) . \vec{h}$ ne dépend pas de l'orientation de P choisie : en effet, si on change l'orientation de P, $\vec{h}$ est changé en $-\vec{h}$, $\mathrm{Sin}(\vec{u}, \vec{v})$ en $-\mathrm{Sin}(\vec{u}, \vec{v})$, et par suite le produit $\mathrm{Sin}(\vec{u}, \vec{v}) . \vec{h}$ est inchangé.
Lorsque l'un des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ est nul on pose $\vec{w} = \vec{0}$.
Nous avons ainsi défini une application de $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3$ dans $\mathcal{E}_3$ puisque le plan P est parfaitement déterminé par la donnée de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ sauf lorsque ceux-ci sont linéairement dépendants et non nuls, auquel cas dans tout plan orienté contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a

$$\mathrm{Sin}(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \text{et donc} \quad \vec{w} = \vec{0}.$$

Définition 1.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathcal{E}_3$ et P un plan orienté les contenant, on appelle **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, défini par

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \mathrm{Sin}(\vec{u}, \vec{v}) . \vec{h},$$

où $\vec{h}$ est le vecteur unitaire de la demi-normale positive de P.
Lorsque $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul on pose, par définition, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

La notation $\vec{u} \wedge \vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$ ».
Il résulte de cette définition que

$$\boxed{\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \qquad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont linéairement dépendants}}$$

Lorsque $\vec{u}$ est non nul, nous désignerons par $\vec{v}'$ la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan H orthogonal à $\vec{u}$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants $\vec{v}'$ est non nul et on peut orienter le plan P, qui contient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, (lequel contient évidemment $\vec{v}'$) au moyen de la base orthonormée ordonnée $\left\{ \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|} \right\}$ de P. On note alors $\vec{h}$ le vecteur unitaire de la demi-normale positive de P ainsi orienté.

Dans le plan P on a

$$\operatorname{Cos}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

et

$$\operatorname{Sin}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{v}' \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}'\|\,\|\vec{v}\|}.$$

Or, par définition de $\vec{v}'$, $\vec{v} - \vec{v}'$ et $\vec{u}$ sont linéairement dépendants, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} - \vec{v}' = \lambda \vec{u}$; il en résulte que

$$(\vec{v} - \vec{v}') \cdot \vec{v}' = 0$$

ce qui conduit à

$$\vec{v}' \cdot \vec{v} = \vec{v}' \cdot \vec{v}' = \|\vec{v}'\|^2.$$

On obtient

$$\operatorname{Sin}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\|\vec{v}'\|^2}{\|\vec{v}'\|\,\|\vec{v}\|}$$

d'où

$$\|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\| \,.\, \operatorname{Sin}(\vec{u}, \vec{v}).$$

Ceci nous permet de donner une seconde définition du produit vectoriel.

Définition 2.

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{E}_3$, on appelle **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ le vecteur $\vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants, et lorsqu'il n'en est pas ainsi le vecteur $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}'\| \cdot \vec{h}$ où $\vec{v}'$ est la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan orthogonal à $\vec{u}$, et $\vec{h}$ l'unique vecteur unitaire tel que $\left\{ \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|}, \vec{h} \right\}$ constitue une base orthonormée directe.

REMARQUES

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants on a
   - soit $\|\vec{u}\| = 0$, si $\vec{u} = \vec{0}$
   - soit $\|\vec{v}'\| = 0$, si $\vec{u} \neq \vec{0}$,

   mais nous ne pouvons pas dire que l'on a encore $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}'\| . \vec{h}$ puisque ceci n'a de sens que si $\vec{u} \neq \vec{0}$.
2. On peut déduire de la définition 2 que, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires orthogonaux, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_3$.
   Réciproquement si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_3$, on a $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
   En particulier :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{array}} \qquad \begin{array}{l} \text{car } \{\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}\} \text{ est directe} \\ \text{car } \{\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}\} \text{ est directe.} \end{array}$$

Interprétons la relation $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}'\| . \vec{h}$ lorsque $\vec{u}$ est non nul.

Notons Δ la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$ et orientée par $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Si nous orientons le plan H orthogonal à Δ de sorte que son orientation soit compatible avec celle de Δ, la base orthonormée ordonnée $\left\{ \frac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|}, \vec{h} \right\}$ de H est directe puisque $\left\{ \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|}, \vec{h} \right\}$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_3$.
Il en résulte que dans H :

$$\text{angle}\,(\vec{v}', \vec{h}) = \delta_+,$$

autrement dit $\vec{h}$ est l'image de $\frac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|}$ par la rotation vectorielle d'axe orienté Δ et d'angle δ_+, ou encore $\|\vec{v}'\| . \vec{h}$ est l'image de $\vec{v}'$ par la rotation vectorielle d'axe orienté Δ et d'angle δ_+. Ceci nous conduit à :

Définition 3.

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{E}_3$, on appelle **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ le vecteur $\vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants, et lorsqu'il n'en est pas ainsi le vecteur déduit de $\vec{v}$ par les trois applications linéaires successives suivantes :

(i) projection sur le plan orthogonal à $\vec{u}$

(ii) homothétie vectorielle de rapport $\|\vec{u}\|$

(iii) rotation vectorielle d'axe Δ orienté par $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et d'angle δ_+.

b) Propriétés du produit vectoriel.

Les propriétés données dans ce paragraphe étant évidentes lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants, nous supposerons dans toutes les démonstrations qu'il n'en est pas ainsi.

Il résulte de la définition 1 que l'on a :

• Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda\vec{u}) \wedge (\mu\vec{v}) = |\lambda| . \|\vec{u}\| . |\mu| . \|\vec{v}\| . \text{Sin}\,(\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}) . \vec{h}$,

or

$$\text{Sin}\,(\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}) = \text{Sin}\,(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{si} \quad \lambda \text{ et } \mu \text{ sont de mêmes signes}$$
$$= -\,\text{Sin}\,(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{si} \quad \lambda \text{ et } \mu \text{ sont de signes contraires.}$$

On a donc

$$|\lambda\mu|\ \text{Sin}\,(\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}) = \lambda\mu\ \text{Sin}\,(\vec{u}, \vec{v})$$

d'où

$$(1) \qquad \boxed{(\lambda\vec{u}) \wedge (\mu\vec{v}) = (\lambda\mu) . \vec{u} \wedge \vec{v}}$$

• $\vec{v} \wedge \vec{u} = \|\vec{v}\| . \|\vec{u}\| . \text{Sin}\,(\vec{v}, \vec{u}) . \vec{h}$
$= -\|\vec{v}\| . \|\vec{u}\| . \text{Sin}\,(\vec{v}, \vec{u}) . \vec{h}$

d'où

$$(2) \qquad \boxed{\vec{v} \wedge \vec{u} = -\,\vec{u} \wedge \vec{v}}$$

On exprime ceci en disant que $(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est antisymétrique.
D'après la définition 3, si $\vec{u}$ est un vecteur non nul de $\mathcal{E}_3$ l'application

$$\begin{array}{l} \mathcal{E}_3 \longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ \vec{v} \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v} \end{array}$$

est linéaire, puisque composée de trois applications linéaires.
On a donc, si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont deux vecteurs de $\mathcal{E}_3$:

$$(3) \qquad \boxed{\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \vec{u} \wedge \vec{v}_2}$$

relation qui reste vraie si $\vec{u}$ est nul.

EXERCICE

L'application $\vec{v} \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ étant linéaire, on a aussi

$$(3') \qquad \boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda . \vec{u} \wedge \vec{v}}$$

Retrouver (1) comme conséquence de (2) et (3').

Si nous nous donnons maintenant deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ de $\mathcal{E}_3$ on a

$$\begin{aligned}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} &= -\,\vec{v} \wedge (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \\ &= -\,\vec{v} \wedge \vec{u}_1 - \vec{v} \wedge \vec{u}_2 \\ &= \vec{u}_1 \wedge \vec{v} + \vec{u}_2 \wedge \vec{v},\end{aligned}$$

donc

$$(4) \qquad \boxed{(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = \vec{u}_1 \wedge \vec{v} + \vec{u}_2 \wedge \vec{v}}$$

On peut résumer les propriétés (1), (2), (3), (4) par :

> L'application $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \longrightarrow \mathcal{E}_3$
> $(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$
> est bilinéaire et antisymétrique.

c) Coordonnées du produit vectoriel.

Soient (x, y, z) les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ et (x', y', z') celles de $\vec{v}$.
On a alors

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= yx'\vec{j} \wedge \vec{i} + zx'\vec{k} \wedge \vec{i} + xy'\vec{i} \wedge \vec{j} + zy'\vec{k} \wedge \vec{j} + xz'\vec{i} \wedge \vec{k} + yz'\vec{j} \wedge \vec{k}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\vec{i} \wedge \vec{j} &= -\,\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= -\,\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= -\,\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i}\end{aligned}$$

d'où

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}.$$

Nous schématisons ce résultat par le tableau :

$$\begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{u} \wedge \vec{v} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \end{array}$$

5. 9 DEUXIÈME PRÉSENTATION

On désigne par $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_3$.

a) Produit mixte d'un triplet de vecteurs de $\mathcal{E}_3$.

Si B' et B'' sont deux bases orthonormées directes de $\mathcal{E}_3$, on a, en vertu des relations

$$\det_{B''} = \det_{B''}(B') . \det_{B'} \quad (\text{cf. § 2.3 } a)$$

et $\qquad \det_{B''}(B') = 1,$

l'égalité $\qquad \det_{B''} = \det_{B'}.$

Nous dirons alors :

Définition.

On appelle **produit mixte** d'un triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathcal{E}_3$, leur déterminant dans une base orthonormée directe quelconque de $\mathcal{E}_3$.

On aura donc :

Théorème.

Le produit mixte d'un triplet de vecteurs est nul si et seulement si les vecteurs sont linéairement dépendants.

C'est une conséquence immédiate de § 2.3 *a*.

EXERCICE

1. Si on désigne par (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dans la base B, établir, en utilisant le déterminant du produit des matrices

$$\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}$$

que l'on a

$$\left[\det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\right]^2 = \begin{vmatrix} \|\vec{u}\|^2 & \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot\vec{u} \\ \vec{u}\cdot\vec{v} & \|\vec{v}\|^2 & \vec{w}\cdot\vec{v} \\ \vec{u}\cdot\vec{w} & \vec{v}\cdot\vec{w} & \|\vec{w}\|^2 \end{vmatrix}$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{E}_3$, l'application de $\mathcal{E}_3$ dans $\mathbb{R}$ qui à $\vec{w}$ associe $\det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}_3$. C'est cette forme linéaire qui va nous permettre de définir le produit vectoriel de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$. Nous le ferons au paragraphe *c*); auparavant nous allons établir un résultat fondamental concernant les formes linéaires sur un espace vectoriel euclidien.

b) Formes linéaires sur un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$.

Soit l une forme linéaire sur $\mathcal{E}$.

Si $(\vec{e}_i)_{i\in I}$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}$, on sait que l est parfaitement déterminée par la famille $(l(\vec{e}_i))_{i\in I}$:

à $\quad \vec{y} = \sum_{i\in I} \alpha^i \vec{e}_i \quad$ correspond $\quad l(\vec{y}) = \sum_{i\in I} \alpha^i\, l(\vec{e}_i).$

Notons $\vec{x}$ le vecteur $\sum_{i\in I} l(\vec{e}_i)\,.\,\vec{e}_i$, i.e. le vecteur de coordonnées $(l(\vec{e}_i))_{i\in I}$; la base $(\vec{e}_i)_{i\in I}$ étant orthonormée, on a alors :

$$\vec{x}\,.\,\vec{y} = \sum_{i\in I} \alpha^i\, l(\vec{e}_i)$$

d'où

$$l(\vec{y}) = \vec{x}\,.\,\vec{y}$$

et $\vec{x}$ est l'unique vecteur vérifiant cette égalité pour tout $\vec{y}$ de $\mathcal{E}$.

Concluons :

Théorème.

Si l est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$, il existe un unique vecteur $\vec{x}$ de $\mathcal{E}$ tel que, quel que soit le vecteur $\vec{y}$ de $\mathcal{E}$, on ait $l(\vec{y}) = \vec{x}\,.\,\vec{y}$.

c) Définition du produit vectoriel.

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de $\mathcal{E}_3$ nous avons vu au *a*) que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 &\longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ \vec{w} &\longmapsto \det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{E}_3$.

Il résulte de l'étude de *b*) qu'il existe un unique vecteur de $\mathcal{E}_3$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, tel que

$$\forall \vec{w} \in \mathcal{E}_3 \qquad \det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v})\,.\,\vec{w}.$$

Définition.

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *de* $\mathcal{E}_3$, on appelle **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, tel que

$$\forall \vec{w} \in \mathcal{E}_3 \qquad \det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v})\,.\,\vec{w}.$$

EXERCICES

2. Montrer que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

3. Montrer que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants.

Le produit mixte étant une forme trilinéaire alternée, on vérifie facilement que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 &\longrightarrow \mathcal{E}_3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v} \end{aligned}$$

est bilinéaire et antisymétrique.

Nous allons montrer maintenant que la définition précédente est équivalente aux trois définitions données au paragraphe 5.8 en calculant les coordonnées, dans la base B, du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ qui vient d'être défini.

Si (x, y, z) et (x', y', z') sont les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans la base B, on a, pour tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (x'', y'', z'') :

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z''$$

en désignant par (α, β, γ) les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Le développement du déterminant conduit à :

$$\begin{aligned} \alpha &= yz' - xz' \\ \beta &= zx' - xz' \\ \gamma &= xy' - yx'. \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi les formules établies au § 5.8. c.

EXERCICES

5.1 Soient F′ et F″ deux sous-espaces vectoriels propres de l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_n$ orienté. On suppose que F′ et F″ sont supplémentaires et orthogonaux, qu'ils sont orientés et que l'orientation de F″ est compatible avec celle de F′.
Montrer que, si l'on pose $p = \dim F'$ $q = \dim F''$, l'orientation de F′ est compatible avec celle de F″ si et seulement si pq est pair.

5.2 1° Soit $f \in O(\mathcal{E}_2)$.
Montrer que l'application $g \longmapsto f^{-1} \circ g \circ f$ de $O(\mathcal{E}_2)$ dans lui-même est un homomorphisme bijectif de groupes et que l'image de $O^+(\mathcal{E}_2)$ par cette application est $O^+(\mathcal{E}_2)$.
2° Montrer que dans $O(\mathcal{E}_2)$ la relation

$$f \sim g \iff f \circ g^{-1} \in O^+(\mathcal{E}_2)$$

est une relation d'équivalence.
Quelles sont ses classes?
3° Reprendre les questions 1° et 2° dans $\mathcal{E}_n$, $n \geqslant 2$.

5.3 Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs unitaires linéairement indépendants de $\mathcal{E}_2$, et $\vec{v}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.
Montrer que

$$\text{angle}\,(\vec{v}, \vec{u}_1) + \text{angle}\,(\vec{v}, \vec{u}_2) = \varpi.$$

5.4 Soient D et D′ deux demi-droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$ de vecteurs directeurs unitaires $\vec{u}, \vec{u}'$, et Δ la bissectrice du couple (D, D′).
Montrer qu'un vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{E}_2$ appartient à Δ si et seulement si

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}'.\vec{v}.$$

Montrer que pour tout vecteur $\vec{v}$ de Δ on a

$$\|\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\,\vec{u}\| = \|\vec{v} - (\vec{u}'.\vec{v})\,\vec{u}'\|.$$

Cette propriété caractérise-telle les éléments de Δ?

5.5 Soit $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}_2$.
On considère les vecteurs $\vec{u}\,(1, -1)$ et $\vec{v}\,(2, 1)$, et les demi-droites vectorielles $D_{\vec{u}}^{+}$, $D_{\vec{v}}^{+}$ qu'ils déterminent.
Donner un vecteur unitaire directeur de la bissectrice du couple $(D_{\vec{u}}^{+}, D_{\vec{v}}^{+})$.

5.6 Soient D et D′ deux droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$ et Δ, Δ' deux droites vectorielles orthogonales respectivement à D et à D′.
Montrer que

$$\text{angle}\,(D, D') = \text{angle}\,(\Delta, \Delta').$$

5.7 Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\mathcal{E}_2$.
Si Δ désigne la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{i}$, on note D et D′ les deux droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$ telles que

$$\text{angle}\,(\Delta, D) = \alpha \quad , \quad \text{angle}\,(\Delta, D') = \alpha'$$

où α et α' sont deux angles de droites donnés.
Quelles sont les matrices, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, des symétries orthogonales s et s' par rapport à D et D′. Quand a-t-on $s' \circ s = s \circ s'$?

5.8 Dans le plan vectoriel euclidien $\mathcal{E}_2$ muni d'une base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, on considère les droites vectorielles $\Delta_{\vec{u}}^{+}$ et $\Delta_{\vec{v}}^{+}$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, où $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$) a pour coordonnées (1, tg x) (resp. (1, tg y)) dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, x et y étant deux réels donnés.
Déterminer les bissectrices du couple $(\Delta_{\vec{u}}^{+}, \Delta_{\vec{v}}^{+})$ en donnant pour chacune un vecteur directeur.

5.9 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs unitaires de $\mathcal{E}_2$ tels que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.
1° Montrer que

$$\text{angle}\,(\vec{u}, \vec{v}) = \text{angle}\,(\vec{v}, \vec{w}) = \text{angle}\,(\vec{w}, \vec{u}).$$

2° Si φ est cette valeur commune établir que $\varphi + \varphi + \varphi = \omega$ et que la détermination de la mesure de φ appartenant à $[0, 2\pi[$ est soit $\frac{2\pi}{3}$ soit $\frac{4\pi}{3}$.

5.10 1° Établir que dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'équation

$$n\dot{x} = \dot{0} \text{ (où } n \in \mathbb{N} \quad \text{et où} \quad n\dot{x} = \dot{x} + \ldots + \dot{x} \quad n \text{ fois)}$$

a n solutions qui sont

$$\dot{0} \ , \ \dot{\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \ , \ \ldots \ , \ \dot{\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} \ , \ \ldots \ , \ \dot{\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}.$$

2° En déduire que dans $\mathcal{A}$ l'équation $n\alpha = \omega$ a n solutions, que l'on peut noter

$$\omega \ , \ \alpha_1 \ , \ \alpha_2 \ , \ \ldots \ , \ \alpha_k \ , \ \ldots \ , \ \alpha_{n-1}$$

où α_k a pour mesure $\frac{2\dot{k}\pi}{n}$.

Montrer que si $\quad 1 \leqslant k \leqslant n-1 \quad , \quad \alpha_k = k\alpha_1.$

3° Soit $\vec{u}_0$ un vecteur unitaire de $\mathcal{E}_2$.
On considère les $n-1$ vecteurs unitaires $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{n-1}$, tels que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\} \qquad \text{angle}\,(\vec{u}_0, \vec{u}_k) = \alpha_k.$$

a) Montrer que l'on a

$$\text{angle}\,(\vec{u}_0, \vec{u}_1) = \text{angle}\,(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \ldots = \text{angle}\,(\vec{u}_{n-2}, \vec{u}_{n-1}).$$

b) Montrer que

$$\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_{n-1} = \vec{0}.$$

(Indication : on pourra utiliser un repère orthonormé $(\vec{u}_0, \vec{v})$ de $\mathcal{E}_2$ et calculer dans ce repère les coordonnées de $\vec{u}_0 + \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_{n-1}$).

4° Plus généralement, montrer que dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'équation $n\dot{x} = \dot{y}$, où $\dot{y}$ est donné, a n solutions qui sont

$$\dot{\left(\frac{y}{n}\right)} \ , \ \dot{\left(\frac{y + 2\pi}{n}\right)} \ , \ \ldots \ , \ \dot{\left(\frac{y + 2(n-1)\pi}{n}\right)} \ ,$$

y étant un représentant quelconque de $\dot{y}$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que dans $\mathcal{A}$ l'équation $n\alpha = \beta$, où β est donné, a n solutions.

5.11 1° Établir que dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ l'équation $n\dot{x} = \dot{0}$ a n solutions qui sont

$$\dot{0} \ , \ \dot{\left(\frac{\pi}{n}\right)} \ , \ \ldots \ , \ \dot{\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \ , \ \dot{\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}.$$

2° En déduire que dans $\mathcal{A}'$ l'équation $n\dot{\alpha} = \dot{\omega}$ a n solutions, que l'on peut noter $\dot{\omega}, \dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\alpha}_{n-1}$ où $\dot{\alpha}_k$ a pour mesure $\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

Montrer que si $1 \leqslant k \leqslant n-1$ on a $\dot{\alpha}_k = k\dot{\alpha}_1$.

3° Plus généralement, montrer que dans $\mathbb{R}/\pi\,\mathbb{Z}$ l'équation $n\dot{x} = \dot{y}$, où $\dot{y}$ est donné, a n solutions qui sont

$$\left(\frac{\dot{y}}{n}\right), \quad \left(\frac{y+\pi}{n}\right)^{\cdot}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{y+(n-1)\pi}{n}\right)^{\cdot},$$

y étant un représentant quelconque de $\dot{y}$ dans $\mathbb{R}$.

En déduire que dans $\mathcal{A}'$ l'équation $n\dot{\alpha} = \dot{\beta}$, où $\dot{\beta}$ est donné, a n solutions.

5.12 Montrer que le produit vectoriel n'est pas associatif.

5.13 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_3$ orienté.
Montrer que l'on a

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u}.\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2.$$

En déduire que si (x, y, z) et (x', y', z') sont les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_3$, on a l'égalité

$$(yz' - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2 + (xy' - x'y)^2 + (xx' + yy' + zz')^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

(Cette égalité est appelée « identité de LAGRANGE »).

5.14 On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathcal{E}_3$.
Étant donnée une transformation orthogonale l de $\mathcal{E}_3$, on pose $\vec{u}' = l(\vec{u})$ et $\vec{v}' = l(\vec{v})$.
Montrer que

$$\vec{u}' \wedge \vec{v}' = \det l.\, l(\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

5.15 **Double produit vectoriel.**

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{E}_3$.
Établir que

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\,\vec{w}$$

en calculant les coordonnées des deux membres en fonction des coordonnées de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

5.16 **Division vectorielle.**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{E}_3$. On se propose de déterminer les vecteurs $\vec{x}$ de $\mathcal{E}_3$ tels que

$$\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}.$$

1° Montrer que pour qu'il existe de tels vecteurs $\vec{x}$ il est nécessaire que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

2° On suppose désormais que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

a) Montrer que si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont deux solutions les vecteurs $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ et $\vec{u}$ sont linéairement dépendants.

b) Déterminer λ pour que $\vec{x} = \lambda\vec{u} \wedge \vec{v}$ soit solution (on utilisera la formule du double produit vectoriel établie dans l'exercice 5.15).

c) En déduire toutes les solutions $\vec{x}$ de $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.

3° Étant donné $\vec{w} \in \mathcal{E}_3$, trouver $\vec{y}$ tel que

$$\vec{y} \wedge \vec{u} = \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{y}.\vec{w} = k$$

où k est un réel donné.

5.17 Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathcal{E}_3$ et B une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_3$.

Calculer

$$\det_B(\vec{u} \wedge \vec{v}\ ,\ \vec{v} \wedge \vec{w}\ ,\ \vec{w} \wedge \vec{u})$$

en fonction de

$$\det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

(On utilisera la formule du double produit vectoriel.)

5.18 Dans l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathcal{E}_3$, on considère la rotation vectorielle l d'axe Δ, orienté par le vecteur unitaire $\vec{k}$, et d'angle φ (φ est un élément du groupe des angles de demi-droites vectorielles du plan vectoriel euclidien $\Delta^\perp$). Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\mathcal{E}_3$, n'appartenant pas à Δ. Nous nous proposons d'exprimer $l(\vec{v})$ en fonction de $\vec{v}$, $\vec{k}$ et φ.

1° On note $\vec{v}'$ la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\Delta^\perp$ et $\vec{i}$ le vecteur unitaire $\dfrac{\vec{v}'}{\|\vec{v}'\|}$.

Soit $\vec{j}$ l'unique vecteur unitaire tel que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constitue une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_3$.
Montrer que

$$\vec{v} = (\vec{v}.\vec{i})\,\vec{i} + (\vec{v}.\vec{k})\,\vec{k}$$

et que

$$l(\vec{v}) = (\vec{v}.\vec{i}\,\mathrm{Cos}\,\varphi)\,\vec{i} + (\vec{v}.\vec{i}\,\mathrm{Sin}\,\varphi)\,\vec{j} + (\vec{v}.\vec{k})\,\vec{k}.$$

2° En déduire

$$l(\vec{v}) = \vec{v}\,\mathrm{Cos}\,\varphi + (1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)\,(\vec{v}.\vec{k})\,\vec{k} + \mathrm{Sin}\,\varphi\,\vec{k} \wedge \vec{v}.$$

5.19 Soient F et G deux fonctions vectorielles de $\mathbb{R}$ dans l'espace euclidien orienté $\mathcal{E}_3$.
On note $F \wedge G$ la fonction vectorielle définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad (F \wedge G)(t) = F(t) \wedge G(t).$$

Montrer que si F et G sont dérivables au point t_0, il en est de même de $F \wedge G$ et que

$$(F \wedge G)'(t_0) = F'(t_0) \wedge G(t_0) + F(t_0) \wedge G'(t_0).$$

5.20 **Corps des quaternions.**

L'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_3$ étant orienté, on munit $\mathbb{R} \times \mathcal{E}_3$ de deux lois internes, notées $+$ et $\times$ et appelées respectivement « addition » et « multiplication », définies de la manière suivante :

$$\forall (\lambda, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}_3 \qquad \forall (\lambda', \vec{x}') \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}_3$$

$$(\lambda, \vec{x}) + (\lambda', \vec{x}') = (\lambda + \lambda', \vec{x} + \vec{x}')$$

$$(\lambda, \vec{x}) \times (\lambda', \vec{x}') = (\lambda\lambda' - \vec{x}.\vec{x}', \lambda\vec{x}' + \lambda'\vec{x} - \vec{x} \wedge \vec{x}').$$

1° Montrer que $\mathbb{R} \times \mathcal{E}_3$ est un groupe abélien pour la loi $+$.

2° Montrer que la multiplication a pour élément neutre $(1, \vec{0})$, et qu'elle est associative (on utilisera la formule du double produit vectoriel donnée dans l'exercice 5.15).
Montrer que la multiplication n'est pas commutative.

3° *a*) Si $u = (\lambda, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}_3$ on pose $\bar{u} = (\lambda, -\vec{x})$.
Établir que

$$\forall u \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}_3 \quad \forall v \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}_3 \quad \overline{u \times v} = \bar{v} \times \bar{u}.$$

b) Calculer $u \times \bar{u}$ et $\bar{u} \times u$ en fonction de λ et de $\vec{x}$.
c) Montrer que l'application

$$N : u \longmapsto \sqrt{u \times \bar{u}}$$

est une norme sur $\mathbb{R} \times \mathcal{E}_3$, qui vérifie de plus

$$\forall u \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}_3 \quad \forall v \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}_3 \quad N(u \times v) = N(u).N(v).$$

d) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R} \times \mathcal{E}_3 - \{0, \vec{0}\}$ $\dfrac{\bar{u}}{N(u)^2}$ est un inverse de u pour la loi $\times$.

Conclure que $\mathbb{R} \times \mathcal{E}_3$, muni des lois $+$ et $\times$, est un corps.

4° Soit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_3$. On pose

$$e = (1, \vec{0}) \quad , \quad i = (0, \vec{e}_1) \quad , \quad j = (0, \vec{e}_2) \quad , \quad k = (0, \vec{e}_3).$$

a) Établir que $\{e, i, j, k\}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R} \times \mathcal{E}_3$.
b) Calculer $e^2, i^2, j^2, k^2, ij, ji, jk, kj, ki, ik$.
c) Montrer que la multiplication est $\mathbb{R}$-bilinéaire.
Si $\quad u = \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k \quad$ où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$
et $\quad u' = \alpha' e + \beta' i + \gamma' j + \delta' k \quad$ où $(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \in \mathbb{R}^4$,

calculer le produit $u \times u'$.
Retouver les résultats de la question 3°.

6| Espaces affines euclidiens et isométries

A tout produit scalaire sur un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ sont associées une norme et une distance sur cet espace.
Si E est un espace affine associé à un espace vectoriel $\mathcal{E}$ muni d'une norme, on peut canoniquement définir une distance sur E. Il en est en particulier ainsi si $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel euclidien. On dit alors que E est un espace affine euclidien.
La structure d'espace affine euclidien est celle du modèle construit par Euclide, d'où le choix de son nom. Ce chapitre est consacré à l'étude de cette structure, pour les espaces E_n de dimension $n = 1, 2, 3$, et des isométries de E_n. Une propriété remarquable est que ces isométries sont des applications affines.
On donne une classification des isométries selon leurs invariants dans E_n.

I. La structure affine euclidienne

6. 1 DÉFINITIONS. CONSÉQUENCES IMMÉDIATES

a) Définition d'un espace affine euclidien.

Définition.
On appelle **espace affine euclidien** tout espace affine E associé à un espace vectoriel euclidien $(\mathcal{E}, \varphi)$.

En particulier, un espace vectoriel euclidien est canoniquement un espace affine euclidien (associé à lui-même).

EXERCICE

1. Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des espaces affines euclidiens associés aux espaces vectoriels euclidiens $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$, montrer que l'on peut munir $E_1 \times \ldots \times E_n$ d'une structure d'espace affine euclidien associé à $\mathcal{E}_1 \times \ldots \times \mathcal{E}_n$ (cf. § 4.1, exercice 3) muni de sa structure euclidienne canonique.

b) Métrique euclidienne.

Notons $\vec{u} \longmapsto \|\vec{u}\|$ la norme euclidienne de $\mathcal{E}$. Etant donnés trois points M, N, P de E, on a :

$$\|\overrightarrow{MN}\| = 0 \iff M = N$$
$$\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{NM}\|$$
$$\|\overrightarrow{MP}\| = \|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}\| \leqslant \|\overrightarrow{MN}\| + \|\overrightarrow{NP}\|.$$

Il en résulte que l'application

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (M, N) & \longmapsto & \|\overrightarrow{MN}\| \end{array}$$

est une distance.

Théorème et définition.

Si E est un espace affine euclidien associé à l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$, l'application d de E × E dans $\mathbb{R}^+$ qui au couple (M, N) associe la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{MN}$ est une distance sur E. Elle est appelée **distance euclidienne** de E.

REMARQUE

Lorsque $\mathcal{E}$ est muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien, on retrouve la distance euclidienne définie au § 4.1 *c*.

EXERCICE

2. Étant donnés trois points M, N, P de E, montrer que l'on a

$$d(M, P) = d(M, N) + d(N, P)$$

si et seulement si N appartient au segment [MP].

c) Transformation de l'expression $\sum_{i \in I} \alpha^i \|\overrightarrow{MA_i}\|^2$.

Étant données une famille $(A_i)_{i \in I}$ de points de E, et une famille $(\alpha^i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{(I)}$, on définit une application ψ de E dans $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall M \in E \qquad \psi(M) = \sum_{i \in I} \alpha^i \|\overrightarrow{MA_i}\|^2.$$

On dit que ψ est la fonction de LEIBNIZ associée à la famille $(A_i, \alpha^i)_{i \in I}$.
Si M et N sont deux points de E, on a :

$$\psi(M) = \sum_{i \in I} \alpha^i \|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA_i}\|^2$$

$$= \left(\sum_{i \in I} \alpha^i\right) \|\overrightarrow{MN}\|^2 + 2 \sum_{i \in I} \alpha^i \varphi(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NA_i}) + \sum_{i \in I} \alpha^i \|\overrightarrow{NA_i}\|^2$$

d'où

$$\psi(M) = \left(\sum_{i \in I} \alpha^i\right) \|\overrightarrow{MN}\|^2 + 2\varphi\left(\overrightarrow{MN}, \sum_{i \in I} \alpha^i \overrightarrow{NA_i}\right) + \psi(N).$$

Nous avons alors deux cas à envisager :

1. $\sum_{i \in I} \alpha^i = 0.$

On sait que dans ce cas $\sum_{i \in I} \alpha^i \overrightarrow{NA_i}$ est un vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{E}$ ne dépendant pas de N, et on obtient

$$\boxed{\psi(M) = \psi(N) + 2\varphi(\overrightarrow{MN}, \vec{v})}$$

2. $\sum_{i \in I} \alpha^i \neq 0.$

En désignant par A le barycentre des points A_i affectés des coefficients α^i, on obtient lorsque N = A,

$$\boxed{\psi(M) = \psi(A) + \left(\sum_{i \in I} \alpha^i\right) \|\overrightarrow{MA}\|^2}$$

EXERCICES

3. Si A et B sont deux points de E et C leur milieu, établir que pour tout point M on a :

$$\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 = 2\|\overrightarrow{CA}\|^2 + 2\|\overrightarrow{CM}\|^2.$$

4. Étant données une famille $(A_i)_{i \in I}$ de points de E et une famille $(\alpha^i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{(I)}$, quel est l'ensemble des points M de E tels que $\psi(M) = k$, où $k \in \mathbb{R}$.

d) Repères orthogonaux, orthonormés.

Définition.

Si E est un espace affine euclidien associé à un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$, on appelle **repère orthogonal** (resp. **orthonormé**) de E tout repère cartésien $\left(O, (\vec{e}_i)_{i \in I}\right)$ pour lequel $(\vec{e}_i)_{i \in J}$ est une base orthogonale (resp. orthonormée) de $\mathcal{E}$.

Dans un repère orthonormé $\left(O, (\vec{e}_i)_{i \in I}\right)$ les coordonnées $(x^i)_{i \in I}$ d'un point M de E sont donc données par :

$$\forall i \in I \qquad x^i = \varphi(\overrightarrow{OM}, \vec{e}_i).$$

D'autre part, si M et N sont deux points ayant pour coordonnées cartésiennes respectives $(x^i)_{i \in I}$ et $(y^i)_{i \in I}$ dans un repère orthonormé $\left(O, (\vec{e}_i)_{i \in I}\right)$ de E, on a :

$$\boxed{d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{\sum_{i \in I} (y^i - x^i)^2}}$$

c) Orientation.

Définition.

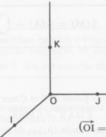
Si E est un espace affine euclidien associé à un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$ de dimension finie, on dit que E est **orienté** lorsque $\mathcal{E}$ est orienté.

Alors, si $n = \dim \mathcal{E}$, un repère orthonormé ordonné $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est qualifié de « **direct** » si et seulement si la base orthonormée ordonnée $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de $\mathcal{E}$ est directe. Nous dirons de même qu'une variété linéaire affine non vide de E est orientée lorsque sa direction est orientée.

REMARQUE

Lorsque $n = 3$ et que l'espace affine euclidien E_3 représente l'espace physique, une orientation universellement adoptée est celle qui peut être physiquement décrite de la manière suivante : un repère orthonormé ordonné $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct (fig. 1)

fig.1



$(\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \overrightarrow{OJ} = \vec{j}, \overrightarrow{OK} = \vec{k})$

si un observateur placé selon OK, les épaules en O, la tête en K, peut sans faire de contorsions avoir le bras droit le long de OI et le bras gauche le long de OJ. Dans ces conditions, si (OI) est un conducteur électrique parcouru par un courant allant de O vers I, si un champ magnétique uniforme est représenté par le vecteur $\vec{j}$, la force électromagnétique qui s'exerce sur OI peut être représentée par un vecteur $\lambda\vec{k}$ ou λ est positif.

6. 2 ORTHOGONALITÉ

a) Variétés orthogonales.

Définition.

Soit E un espace affine euclidien associé à un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$. On dit que deux variétés linéaires affines non vides de $\mathcal{E}$ sont **orthogonales** si leurs directions sont des sous-espaces orthogonaux de $\mathcal{E}$.

EXERCICE

1. Lorsque E est de dimension 3, montrer qu'une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites distinctes et non parallèles de ce plan.

REMARQUE

Si un vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{E}$ est orthogonal à la direction d'une variété linéaire affine de E, nous dirons souvent, par abus de langage, que $\vec{u}$ est orthogonal ou normal à cette variété.

Comme nous l'avons fait dans le cas des espaces vectoriels euclidiens de dimension 3, nous dirons que, dans un espace affine euclidien E de dimension 3, deux plans sont orthogonaux si leurs directions sont des plans vectoriels orthogonaux de $\mathcal{E}$ (au sens qui a été défini dans le paragraphe 4.2. a).

Il en résulte que l'on a :

Théorème.

Deux plans d'un espace affine euclidien de dimension 3 sont orthogonaux si et seulement si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

b) Projections orthogonales. Symétries orthogonales.

Définition.

Soit E′ une variété linéaire affine non vide, de direction $\mathcal{E}'$, d'un espace affine euclidien E de dimension finie. On appelle **projection orthogonale** sur E′ la projection sur E′ parallèlement au supplémentaire orthogonal $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}'^{\perp}$ de $\mathcal{E}'$.

EXERCICE

2. *Distance d'un point à une variété linéaire affine de* E, E *étant de dimension finie.*
Soient M un point de E et E′ une variété linéaire affine de E. L'ensemble ayant pour éléments les nombres réels $d(M, N)$, lorsque N décrit E′, est une partie de $\mathbb{R}$ minorée par O; elle admet donc une borne inférieure positive ou nulle que l'on note $\inf \{d(M, N) \mid N \in E'\}$.

Par définition, nous appellerons distance de M à E′ le réel $\inf \{d(M, N) \mid N \in E'\}$ que nous noterons $d(M, E')$.
Montrer que si M′ est la projection orthogonale de M sur E′, on a :

$$\forall N \in E' \quad d(M, N)^2 = d(M, M')^2 + d(M', N)^2.$$

En déduire que

$$d(M, E') = d(M, M').$$

De même nous dirons :

Définition.

Soit E′ une variété linéaire affine non vide, de direction $\mathcal{E}'$, d'un espace affine euclidien E de dimension finie. On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à E′ (ou de base E′) la symétrie par rapport à E′ de direction $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}'^{\perp}$.

6. 3 REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE VARIÉTÉ LINÉAIRE AFFINE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

a) Dans un plan affine euclidien P.

On désigne par $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P, et si M est un point de P par (x, y) ses coordonnées cartésiennes.

Théorème.

Si $\vec{v}$ est un vecteur normal à la droite D d'équation $ux + vy + h = 0$, les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont de la forme $(\lambda u, \lambda v)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. En particulier le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\left(\dfrac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right), \left(\dfrac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)$ est un vecteur unitaire orthogonal à D.

Nous avons vu, en effet, au paragraphe 3.14 a qu'un vecteur non nul de coordonnées (α, β) est un vecteur directeur de D si et seulement si on a $u\alpha + v\beta = 0$. Cette égalité implique que le vecteur de coordonnées (u, v) est orthogonal à tout vecteur directeur de D donc est un vecteur orthogonal à D. L'énoncé du théorème résulte de ce que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à D est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

REMARQUE

Une droite D de P est un hyperplan de P; par suite il existe une fonction affine f telle que $D = f^{-1}(\{0\})$.
Si l est l'application linéaire associée à f, l est une forme linéaire sur l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{E}, \varphi)$ auquel P est associé.

Donc il existe un vecteur $\vec{\eta}$ de $\mathcal{E}$ tel que

$$\forall \vec{w} \in \mathcal{E} \qquad l(\vec{w}) = \varphi(\vec{\eta}, \vec{w}).$$

Il en résulte que si (u, v) sont les coordonnées de $\vec{\eta}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned} \forall M \in P \qquad f(M) &= f(O) + l(\overrightarrow{OM}) \\ &= f(O) + \varphi(\vec{\eta}, \overrightarrow{OM}) \\ &= f(O) + ux + vy \end{aligned}$$

et donc une équation de D est, en posant $h = f(O)$, $ux + vy + h = 0$.
La direction de D, étant l'hyperplan noyau de l, est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{\eta}$.

EXERCICES

1. On note s la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation $x + y = 1$. Calculer les coordonnées (x', y') de $s(M)$ en fonction des coordonnées (x, y) de M.

2. Montrer que l'application

$$M(x, y) \longmapsto M'(x', y')$$

telle que

$$x' = \frac{x + 2y - 2}{5}$$

$$y' = \frac{2x + 4y + 1}{5}$$

est une projection orthogonale.
Quelle est sa base?

Corollaire.

Les droites D, D′ d'équations $ux + vy + h = 0$, $u'x + v'y + h' = 0$, sont orthogonales si et seulement si $uu' + vv' = 0$.

Le vecteur $\vec{v}(u, v)$ est orthogonal à D, le vecteur $\vec{v}'(u', v')$ est orthogonal à D′, et on a :

$$\begin{aligned} \text{D et D' sont orthogonales} &\iff \vec{v} \text{ est un vecteur directeur de D'} \\ &\iff \vec{v} \text{ et } \vec{v}' \text{ sont orthogonaux} \\ &\iff \varphi(\vec{v}, \vec{v}') = 0 \end{aligned}$$

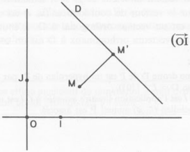
d'où le résultat.

Applications :

1. *Distance d'un point à une droite.*

Soit $M(x, y)$ un point de P et $M'(x', y')$ sa projection orthogonale sur la droite D d'équation $ux + vy + h = 0$. Nous nous proposons d'évaluer la distance de M à D c'est-à-dire le nombre $d(M, M')$ (fig. 2).

fig. 2



$$(\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \overrightarrow{OJ} = \vec{j})$$

Notons $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\left(\dfrac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \dfrac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)$; $\vec{n}$ est un vecteur unitaire orthogonal à D.

On a $\qquad d(M'M) = \|\overrightarrow{M'M}\|,$

or $\qquad \overrightarrow{M'M} = \lambda \vec{n},$

et, puisque $\vec{n}$ est unitaire, $\qquad \|\overrightarrow{M'M}\| = |\lambda|.$

Déterminons λ.

De l'égalité $\qquad \varphi(\overrightarrow{M'M}, \vec{n}) = \lambda,$

on déduit

$$(x' - x)\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} + (y' - y)\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lambda.$$

Comme $M' \in D$ on a $ux' + vy' = -h$, ce qui conduit à

$$\lambda = \frac{ux + vy + h}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Conclusion :

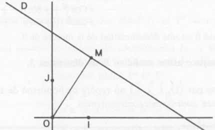
La distance de $M(x, y)$ à la droite D d'équation $ux + vy + h = 0$ est $\dfrac{|ux + vy + h|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

2. *Équation normale d'une droite.*

Soient D une droite de P et N la projection orthogonale de O sur D (fig. 3). On a :

$$\forall M \in E \qquad M \in D \iff \varphi(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{NM}) = 0.$$

fig. 3



Or $\qquad \varphi(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{NM}) = \varphi(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}) = \varphi(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) - \|\overrightarrow{ON}\|^2,$

d'où

$$\forall M \in E, \qquad M \in D \iff \varphi(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) = \|\overrightarrow{OM}\|^2.$$

Supposons N distinct de O et posons

$$\theta = \text{angle}\,(\vec{i}, \overrightarrow{ON})$$
$$p = \|\overrightarrow{ON}\|.$$

On obtient $\overrightarrow{ON} = p \operatorname{Cos} \theta . \vec{i} + p \operatorname{Sin} \theta . \vec{j},$

et par suite $\varphi(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) = px \operatorname{Cos} \theta + py \operatorname{Sin} \theta.$

En conclusion $M \in D \Longleftrightarrow x \operatorname{Cos} \theta + y \operatorname{Sin} \theta - p = 0.$

L'équation $x \operatorname{Cos} \theta + y \operatorname{Sin} \theta - p = 0$, où $p > 0$, est appelée **équation normale** de D.

REMARQUE

Si $\vec{v}$ est un vecteur unitaire orthogonal à D, les coordonnées de $\vec{v}$ sont soit $(\operatorname{Cos} \theta, \operatorname{Sin} \theta)$ soit $(-\operatorname{Cos} \theta, -\operatorname{Sin} \theta)$.

EXEMPLE

Cherchons l'équation normale de la droite D d'équation

$$3x - 4y - 10 = 0.$$

On a $$p = \|\overrightarrow{ON}\| = d(O, N) = \frac{|-10|}{\sqrt{9+16}} = 2,$$

donc l'équation normale de D est

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

EXERCICES

3. Quelle est l'équation normale de la droite D d'équation $2x - y + 3 = 0$?
4. On considère la droite $D(M_0, \vec{u})$ où M_0 a pour coordonnées $(1, 2)$ et $\vec{u}\,(1, -1)$.
   Déterminer la projection N de O sur $D(M_0, \vec{u})$; en déduire l'équation normale de $D(M_0, \vec{u})$.

REMARQUE

Lorsque P est orienté, on peut écrire au lieu de

$$x \operatorname{Cos} \theta + y \operatorname{Sin} \theta - p = 0,$$
$$x \cos \hat{\theta} + y \sin \hat{\theta} - p = 0$$

où $\hat{\theta}$ est une détermination de la mesure de θ.

b) Dans un espace affine euclidien E de dimension 3.

On désigne par $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E, et si M est un point de E par (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes.

Théorème.

Si $\vec{v}$ est un vecteur orthogonal au plan P d'équation $ux + vy + wz + h = 0$, les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont de la forme $(\lambda u, \lambda v, \lambda w)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
En particulier le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées

$$\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right)$$

est un vecteur unitaire orthogonal à P.

Nous laissons au lecteur le soin d'établir la démonstration de ce résultat, qui est en tout point analogue à celle donnée pour une droite en *a*).

EXERCICES

5. Exprimer en fonction des coordonnées (x, y, z) de M, les coordonnées (x', y', z') de la projection orthogonale M' de M sur le plan d'équation $x - y + z - 2 = 0$.
6. Montrer que l'application
   $$M(x, y, z) \longmapsto M'(x', y', z')$$
   telle que
   $$x' = \frac{5x + 2y + 2z + 3}{3}$$
   $$y' = \frac{2x + 5y + 2z + 3}{3}$$
   $$z' = \frac{2x + 2y + 5z + 3}{3}$$
   est une symétrie orthogonale.
   Déterminer sa base.

Corollaire.

Les plans P, P' d'équations $ux + vy + wz + h = 0$ et $u'x + v'y + w'z + h' = 0$ sont orthogonaux si et seulement si $uu' + vv' + ww' = 0$.

En effet, le vecteur $\vec{v}\,(u, v, w)$ est orthogonal à P, le vecteur $\vec{v}'\,(u', v', w')$ est orthogonal à P', et, par définition, P et P' sont dits orthogonaux si et seulement si $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ sont orthogonaux, autrement dit si et seulement si $\varphi(\vec{v}, \vec{v}') = 0$.

1. *Orthogonalité d'une droite et d'un plan.*

Soit P le plan d'équation $ux + vy + wz + h = 0$ et D la droite définie par les équations

$$\begin{cases} u'x + v'y + w'z + h' = 0 \\ u''x + v''y + w''z + h'' = 0 \end{cases}$$

ces équations représentant respectivement des plans P' et P'' non parallèles.
On a alors :

D et P sont orthogonaux $\Longleftrightarrow$ le vecteur de coordonnées (u, v, w) est parallèle à la direction de D, autrement dit est parallèle aux directions des plans P' et P''.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u'u + v'v + w'w = 0 \\ u''u + x''v + w''w = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{P et P' sont orthogonaux} \\ \text{P et P'' sont orthogonaux.} \end{cases}$$

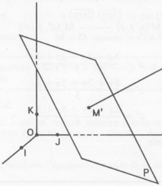
EXERCICE

7. Donner une équation du plan P contenant le point de coordonnées $(1, 0, 1)$, orthogonal à la droite D définie par
   $$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

2. *Distance d'un point à un plan.*

Soit M (x, y, z) un point de E et M' (x', y', z') sa projection orthogonale sur le plan P d'équation $yx + uy + wz + h = 0$. Nous nous proposons d'évaluer la distance de M à P c'est-à-dire le nombre d(M, M') (fig. 4.)

fig. 4



$(\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \overrightarrow{OJ} = \vec{j}, \overrightarrow{OK} = \vec{k})$

Notons $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées

$$\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right);$$

$\vec{n}$ est un vecteur unitaire orthogonal à P.

On a :

$$d(\mathrm{M}', \mathrm{M}) = \|\overrightarrow{\mathrm{M'M}}\|,$$

or

$$\overrightarrow{\mathrm{M'M}} = \lambda\vec{n},$$

d'où

$$d(\mathrm{M}', \mathrm{M}) = |\lambda|.$$

De l'égalité

$$\varphi(\overrightarrow{\mathrm{M'M}}, \vec{n}) = \lambda,$$

on déduit

$$(x - x')\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} + (y - y')\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} + (z - z')\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \lambda.$$

Comme M' ∈ P on a $\quad ux' + vy' + wz' = -h,$

il en résulte

$$\lambda = \frac{ux + vy + wz + h}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}.$$

Conclusion :

La distance de M (x, y, z) au plan P d'équation $ux + vy + wz + h = 0$ est $\dfrac{|ux + vy + wz + h|}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$.

c) **Problèmes résolus.**

E désigne un espace affine euclidien de dimension 3, associé à $\mathcal{E}_3$, $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E et (x, y, z) les coordonnées d'un point M de E.

1. *Distance d'un point* M *à une droite* D.

Nous traiterons deux cas.

1^er^ cas : la droite D est définie comme intersection de deux plans orthogonaux P' et P''. Autrement dit D est définie par le système d'équations

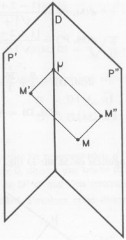
$$\begin{cases} u'x + v'y + w'z + h' = 0 \\ u''x + v''y + w''z + h'' = 0 \end{cases}$$

avec

$$u'u'' + v'v'' + w'w'' = 0.$$

Soient M', M'' les projections orthogonales de M sur P' et P'' et μ la projection orthogonale de M sur D (fig. 5).

fig. 5



Lemme.
Étant donnés un plan P' de E, une droite D de P' et un point M de E, si on note M' la projection orthogonale de M sur P', les points M et M' ont même projection orthogonale sur D.

En effet, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ étant orthogonal au plan P' est orthogonal à D. D'autre part, si μ' désigne la projection orthogonale de M' sur D, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}'\mu'}$ est orthogonal à D. Il en résulte que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}\mu'} = \overrightarrow{\mathrm{MM}'} + \overrightarrow{\mathrm{M}'\mu'}$ est aussi orthogonal à D et donc que μ' est la projection orthogonale de M sur D.

On peut donc conclure que μ est la projection orthogonale de M' sur P''.

Comme le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ est orthogonal à P', il appartient à la direction de P''; les points M'' et μ étant les projections orthogonales de M et M' sur P'', on obtient alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \overrightarrow{\mathrm{M}''\mu}.$$

D'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{M\mu}\|^2 &= \|\overrightarrow{MM''} + \overrightarrow{M''\mu}\|^2\\ &= \|\overrightarrow{MM''}\|^2 + \|\overrightarrow{M''\mu}\|^2 \quad \text{puisque MM'' et M''}\mu \text{ sont orthogonaux}\\ &= \|\overrightarrow{MM''}\|^2 + \|\overrightarrow{MM'}\|^2,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{d(\mathrm{M}, \mathrm{D})^2 = d(\mathrm{M}, \mathrm{P'})^2 + d(\mathrm{M}, \mathrm{P''})^2}$$

EXEMPLE NUMÉRIQUE

Le point M a pour coordonnées (1, 2, − 1), la droite D est définie par

$$\begin{cases} x - y + 4 = 0 & (\mathrm{P'})\\ x + y - z + 2 = 0 & (\mathrm{P''}).\end{cases}$$

On vérifie d'abord que les plans P' et P'' sont orthogonaux.
On a

$$d(\mathrm{M}, \mathrm{P'}) = \frac{|1 - 2 + 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$d(\mathrm{M}, \mathrm{P''}) = \frac{|1 + 2 + 1 + 2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

d'où

$$d(\mathrm{M}, \mathrm{D})^2 = \frac{9}{2} + \frac{36}{3} = \frac{9}{2} + 12 = \frac{33}{2}$$

et

$$d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = \sqrt{\frac{33}{2}}.$$

2^e *cas :* $\mathrm{D} = \mathrm{D}(\mathrm{M}_0, \vec{u})$.

Soit μ la projection orthogonale de M sur D (fig. 6).

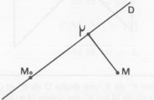


fig. 6

Orientons E au moyen du repère orthonormé ordonné $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on a alors :

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}} = \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| . \vec{h}$$

en désignant par $\vec{v}$ la projection orthogonale de $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}$ sur le plan vectoriel orthogonal à $\vec{u}$, et par $\vec{h}$ un vecteur unitaire convenablement choisi (cf. § 5.8. a, définition 2).

Comme

$$\vec{v} = \overrightarrow{\mu\mathrm{M}}$$

on obtient

$$\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}\| = \|\vec{u}\| . \|\overrightarrow{\mu\mathrm{M}}\|$$

d'où

$$\boxed{d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}\|}{\|\vec{u}\|}}$$

EXEMPLE NUMÉRIQUE

M a pour coordonnées (1, − 1, 1), M_0 (2, 0, 1), et $\vec{u}$ (1, 3, 1).
On a

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{u} \wedge \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

d'où

$$\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}\|^2 = 1 + 1 + 4 = 6.$$

D'autre part

$$\|\vec{u}\|^2 = 1 + 9 + 1 = 10,$$

on a donc

$$d(\mathrm{M}, \mathrm{D}) = \sqrt{\frac{6}{10}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

2. *Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.*

Soient

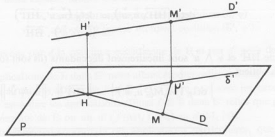
$$\mathrm{D} = \mathrm{D}(\mathrm{M}_0, \vec{u}) \qquad \mathrm{D'} = \mathrm{D}(\mathrm{M}'_0, \vec{u}')$$

deux droites non coplanaires.

L'ensemble ayant pour éléments les nombres réels $d(\mathrm{M}, \mathrm{M'})$ où $\mathrm{M} \in \mathrm{D}$ et $\mathrm{M'} \in \mathrm{D'}$ est une partie de $\mathbb{R}$ minorée par 0, donc a une borne inférieure positive ou nulle que l'on appellera distance de D et de D' et que l'on notera $d(\mathrm{D}, \mathrm{D'})$.

Nous nous proposons d'abord d'évaluer cette distance

fig. 7



Soit P le plan contenant D, ayant pour direction le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ (donc D' est parallèle à P), et δ' la projection orthogonale de D' sur P (fig. 7). D et δ' n'étant pas parallèles ont pour intersection un point H de P qui est la projection orthogonale sur P d'un point H' de D'.

Alors si M est un point de D et M′ un point de D′, on a, en désignant par μ' la projection orthogonale de M′ sur P :

$$\overrightarrow{M'\mu'} = \overrightarrow{H'H} \quad (\text{car } \overrightarrow{H'M'} = \overrightarrow{M\mu'})$$

et

$$\overrightarrow{M'\mu'} \text{ et } \overrightarrow{\mu' M} \text{ sont orthogonaux.}$$

Il en résulte que

$$\|\overrightarrow{MM'}\|^2 = \|\overrightarrow{M\mu'}\|^2 + \|\overrightarrow{\mu' M'}\|^2$$

d'où

$$\|\overrightarrow{MM'}\|^2 = \|\overrightarrow{M\mu'}\|^2 + \|\overrightarrow{HH'}\|^2.$$

Par suite

$$\inf\{\|\overrightarrow{MM'}\|^2 \mid M \in D, M' \in D'\} = \|\overrightarrow{HH'}\|^2 + \inf\{\|\overrightarrow{M\mu'}\|^2 \mid M \in D, M' \in D'\}.$$

Or

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M\mu'} = \vec{0} &\iff \mu' = M\\ &\iff \mu' = M = H\\ &\iff M' = H', M = H,\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{d(D, D') = \|\overrightarrow{HH'}\|}$$

La droite (HH′) est appelée **la perpendiculaire commune** à D et à D′.

Évaluons maintenant $\|\overrightarrow{HH'}\|$.

Si nous orientons $\mathcal{E}_3$ par la base orthonormée ordonnée $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ on a

$$\begin{aligned}\det_B(\overrightarrow{M_0M'_0}, \vec{u}, \vec{u}') &= \det_B(\overrightarrow{M_0H} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'_0}, \vec{u}, \vec{u}')\\ &= \det_B(\overrightarrow{HH'}, \vec{u}, \vec{u}')\end{aligned}$$

car $\overrightarrow{M_0H}$ et $\vec{u}$ sont linéairement dépendants, et $\overrightarrow{H'M'_0}$ et $\vec{u}'$ sont linéairement dépendants.

D'autre part

$$\begin{aligned}\det_B(\overrightarrow{HH'}, \vec{u}, \vec{u}') &= \det_B(\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{HH'})\\ &= (\vec{u} \wedge \vec{u}') \cdot \overrightarrow{HH'}\end{aligned}$$

et comme $\overrightarrow{HH'}$ et $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ sont linéairement dépendants (ils sont tous deux orthogonaux à P), on obtient

$$|\det_B(\overrightarrow{M_0M'_0}, \vec{u}, \vec{u}')| = \|\overrightarrow{HH'}\| \cdot \|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|.$$

d'où

$$\boxed{d(D, D') = \frac{|\det_B(\overrightarrow{M_0M'_0}, \vec{u}, \vec{u}')|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}}$$

EXEMPLE NUMÉRIQUE

Traitons le cas $M_0(1, 2, -1)$, $M'_0(0, 1, 2)$,
$\vec{u}(1, 0, -1)$, $\vec{u}'(0, 1, -4)$.

On a :

$$\det_B(\overrightarrow{M_0M'_0}, \vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix} = -2$$

et

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad \vec{u}'\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix} \quad \vec{u} \wedge \vec{u}'\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$$

d'où

$$\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|^2 = 1 + 16 + 1 = 18,$$

ce qui donne

$$d(D, D') = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Une autre méthode consiste à établir l'équation de P et comme $d(D, D') = d(M'_0, P)$ de calculer la distance de M'_0 à P. Il est alors inutile d'orienter E.

Dans l'exemple ci-dessus, cela donne les calculs suivants :

équation de P
$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0\\ y-2 & 0 & 1\\ z+1 & -1 & -4\end{vmatrix} = 0$$

soit

$$x + 4y + z - 8 = 0$$

et

$$d(M'_0, P) = \frac{|4 + 2 - 8|}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

6.4 ISOMÉTRIES

Considérons deux espaces affines euclidiens :

E associé à l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{E}, \varphi)$
E′ associé à l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{E}', \varphi')$.

Nous désignerons par d la métrique euclidienne de E et par d' celle de E′.

Parmi les applications de E dans E′ nous allons étudier celles qui sont compatibles d'une part avec les structures affines de E et E′, et d'autre part avec les structures métriques de E et E′, c'est-à-dire les applications affines f de E dans E′ telles que pour tout couple (M, N) d'éléments de E on ait $d'(f(M), f(N)) = d(M, N)$.

Le résultat fondamental concernant ces applications particulières, que nous établirons dans la suite, montrera qu'il est superflu de demander à ces applications d'être affines, ceci étant une conséquence de la seconde propriété.

Définition.

Une application f de E dans E′ telle que pour tout couple (M, N) d'éléments de E on ait $d'(f(M), f(N)) = d(M, N)$ est appelée **isométrie** de E dans E′.

On peut alors énoncer :

Théorème.

Soit f une application de E dans E'. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est une isométrie

(ii) f est affine et l'application linéaire l associée à f est une application orthogonale de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii).

Soit M un point de E et $M' = f(M)$ son image. Considérons l'application l de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ définie par

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{E} \qquad l(\vec{u}) = f(M + \vec{u}) - f(M).$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathcal{E}$, soient $N = M + \vec{u}$, $P = M + \vec{v}$ et $N' = f(N)$, $P' = f(P)$ leurs images.

On a

$$\begin{aligned} d(N, P)^2 &= \|\overrightarrow{NP}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{NM}\|^2 + 2\varphi(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MP}) + \|\overrightarrow{MP}\|^2 \\ &= d(N, M)^2 + 2\varphi(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MP}) + d(M, P)^2, \end{aligned}$$

de même

$$d'(N', P')^2 = d'(N', M')^2 + 2\varphi'(\overrightarrow{N'M'}, \overrightarrow{M'P'}) + d'(M', P')^2.$$

Comme

$$d'(N', P') = d(N, P), \qquad d'(N', M') = d(N, M)$$

et

$$d'(M', P') = d(M, P),$$

on obtient

$$\varphi(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MP}) = \varphi'(\overrightarrow{N'M'}, \overrightarrow{M'P'}).$$

Or

$$\overrightarrow{NM} = -\vec{u} \qquad \overrightarrow{MP} = \vec{v}$$
$$\overrightarrow{N'M'} = -l(\vec{u}) \qquad \overrightarrow{M'P'} = l(\vec{v})$$

d'où

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi'(l(\vec{u}), l(\vec{v})).$$

Donc l conserve le produit scalaire et par suite est une application orthogonale de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.

En particulier l est linéaire et donc f est affine.

(ii) $\Longrightarrow$ (i).

Si M et N sont deux points de E, on a

$$\begin{aligned} d'(f(M), f(N)) &= \|f(N) - f(M)\| \\ &= \|l(\overrightarrow{MN})\| \\ &= \|\overrightarrow{MN}\| \quad \text{puisque } l \text{ est une application orthogonale} \\ &= d(M, N). \end{aligned}$$

REMARQUE

Si on munit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de leurs structures affines euclidiennes canoniques, il y a identité entre les isométries f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ telles que $f(\vec{0}) = \vec{0}$, et les applications orthogonales de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.

Composition des isométries.

Soient E, E', E'' trois espaces affines euclidiens, f une isométrie de E dans E' et g une isométrie de E' dans E''. On a alors, en désignant par d, d', d'', les métriques euclidiennes respectives de E, E', E'',

$$\forall (M, N) \in E \times E \qquad d''(g \circ f(M), g \circ f(N)) = d'(f(M), f(N)) = d(M, N).$$

D'où :

Théorème.

La composée de deux isométries est une isométrie.

Les isométries ont la propriété de « conserver l'orthogonalité », c'est-à-dire :

Théorème.

Soit f une isométrie d'un espace affine euclidien E dans un espace affine euclidien E'. Si F_1 et F_2 sont deux variétés linéaires affines orthogonales de E, $f(F_1)$ et $f(F_2)$ sont deux variétés linéaires affines orthogonales de E'.

Notons D_1 et D_2 les directions respectives de F_1 et F_2, et l l'application linéaire associée à f.

On sait que $f(F_1)$ (resp. $f(F_2)$) est une variété linéaire affine de E' de direction $l(D_1)$ (resp. $l(D_2)$).

Comme l est une application orthogonale, les images par l de deux sous-espaces orthogonaux de $\mathcal{E}$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathcal{E}'$.

Par suite $l(D_1)$ et $l(D_2)$ sont orthogonaux, autrement dit les variétés linéaires affines $f(F_1)$ et $f(F_2)$ sont orthogonales.

6.5 ISOMORPHISMES D'ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

Définition.

Soient E et E' deux espaces affines euclidiens. On dit qu'une isométrie f de E dans E' est **un isomorphisme d'espaces affines euclidiens** s'il existe une isométrie g de E' dans E telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{E'}.$$

Nous allons démontrer :

Théorème.

Soient E et E' deux espaces affines euclidiens associés respectivement aux espaces vectoriels euclidiens $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, et f une isométrie de E dans E'.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme d'espaces affines euclidiens

(ii) l'application linéaire l associée à f est un isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii).

Car, en particulier, f est un isomorphisme d'espaces affines et il en résulte que l est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Comme de plus, l est une application orthogonale, l est un isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens (cf. § 4.4).

(ii) $\Longrightarrow$ (i).

L'application linéaire l étant un isomorphisme d'espaces vectoriels, f est un isomorphisme d'espaces affines.

Alors l'application affine réciproque f^{-1} a pour application linéaire associée l^{-1} qui, par hypothèse, est une application orthogonale; il en résulte que f^{-1} est une isométrie, et donc que f est un isomorphisme d'espaces affines euclidiens.

Corollaire.

Soient E et E′ deux espaces affines euclidiens de dimensions finies associés respectivement aux espaces vectoriels euclidiens $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, et f une isométrie de E dans E′. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme d'espaces affines euclidiens
(ii) f est bijective
(iii) l'application linéaire l associée à f est bijective
(iv) E et E′ ont même dimension.

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède et du théorème du § 4.4.

Comme tous les espaces affines euclidiens de dimension n sont isomorphes, nous noterons E_n l'un d'entre eux associé à un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_n$.

EXERCICE

Soient E et E′ deux espaces affines euclidiens de dimensions finies. Si f est une isométrie de E dans E′ montrer que f est un isomorphisme d'espaces euclidiens de E sur f(E), et que la dimension de E est inférieure ou égale à la dimension de E′.

6. 6 GROUPE DES ISOMÉTRIES DE E_n

D'après ce qui précède, toute isométrie de E_n dans E_n est un isomorphisme de E_n sur lui-même et en particulier est un élément de GLA (E_n).

Alors si f et g sont deux isométries de E_n dans lui-même, f^{-1} et $g \circ f$ sont des isométries de E_n dans lui-même, et par suite l'ensemble des isométries de E_n dans E_n, que pour simplifier nous appellerons ensemble des isométries de E_n, est un sous-groupe de GLA (E_n).

Théorème et définition.

L'ensemble des isométries de E_n est un sous-groupe de GLA (E_n) appelé **groupe des isométries** de E_n et noté Is (E_n).

Nous avons défini au § 3.16, exercice 3, une application L de GLA (E_n) dans GL ($\mathcal{E}_n$) et montré que cette application était un homomorphisme de groupes.

Si l'on restreint L au sous-groupe Is (E_n) de GLA (E_n), on obtient :

L est un homomorphisme de Is (E_n) sur O ($\mathcal{E}_n$), et le noyau de cet homomorphisme est le sous-groupe des translations de E_n.

Il est en effet immédiat que l'image de Is (E_n) par L est le groupe orthogonal de $\mathcal{E}_n$. On a, d'autre part, montré au § 3.20 que le noyau de cet homomorphisme est le sous-groupe des translations de E_n.

L'image réciproque par L du sous-groupe O^+ ($\mathcal{E}_n$) de O ($\mathcal{E}_n$) est un sous-groupe de Is (E_n) que l'on note Is^+ (E_n).

Définition.

Étant donné un espace affine euclidien E_n de dimension n, on appelle **isométrie positive** (ou **déplacement**) de E_n tout élément du groupe $Is^+(E_n)$, c'est-à-dire toute isométrie admettant comme application linéaire associée une transformation orthogonale positive.

Les éléments de Is (E_n) n'appartenant pas à Is^+ (E_n) ont pour application linéaire associée un élément de O^- ($\mathcal{E}_n$). On notera Is^- (E_n) le complémentaire de Is^+ (E_n) dans Is (E_n); les éléments de Is^- (E_n) seront appelés **isométries négatives** de E_n (on les appelle aussi parfois **antidéplacements**).

6. 7 ANGLES DANS UN ESPACE AFFINE EUCLIDIEN

a) Angles de demi-droites de E_2 ayant même origine.

Définition.

Étant données deux demi-droites de E_2 ayant même origine M et de vecteurs directeurs $\vec{u}, \vec{u}'$, on appelle **angle** des deux demi-droites l'angle des vecteurs $\vec{u}, \vec{u}'$.

L'angle de deux demi-droites est donc un élément du groupe $\mathcal{A}$ des angles de demi-droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$.

EXERCICE

1. *Somme des angles d'un triangle.*

Étant donnés trois points A, B, C de E_2 montrer que l'on a

$$\text{angle}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \text{angle}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \text{angle}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \varpi.$$

Définition.

Étant données deux demi-droites de E_2, d'origine M, et de vecteurs directeurs $\vec{u}, \vec{u}'$, on appelle **bissectrice** de ces demi-droites la droite contenant M ayant pour direction la droite vectorielle bissectrice du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{u}')$.

b) Angles de droites dans E_2.

Définition.

On appelle **angle** de deux droites de $\mathcal{E}_2$ l'angle de leurs directions dans $\mathcal{E}_2$.

Si Δ et Δ' sont deux droites de E_2, leur angle, qui est un élément du groupe $\mathcal{A}'$ des angles de droites de $\mathcal{E}_2$, est noté angle (Δ, Δ').

Lorsque Δ et Δ' ne sont pas parallèles notons M leur point commun.

On appelle alors **bissectrices** de Δ et de Δ' les droites Δ_1 et Δ_2 contenant M et ayant pour directions respectives celles des bissectrices dans $\mathcal{E}_2$ des directions de Δ et de Δ'.

Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.

Théorème.

Si Δ_1 et Δ_2 sont les bissectrices d'un couple(Δ, Δ') de droites sécantes de E_2 on a, pour tout point m de E_2 :

$$m \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \Longleftrightarrow m \text{ est équidistant de } \Delta \text{ et de } \Delta'.$$

Considérons un repère orthonormé $(M, \vec{u_1}, \vec{u_2})$ tel que :

$\{M\} = \Delta \cap \Delta'$, $\vec{u_1}$ (resp. $\vec{u_2}$) est un vecteur unitaire directeur de Δ_1 (resp. Δ_2).

On notera (x, y) les coordonnées d'un point m de E_2 dans ce repère.

La droite Δ a une équation de la forme $\alpha x + \beta y = 0$. Alors Δ' image de Δ par la symétrie orthogonale de base Δ_1 a pour équation $\alpha x - \beta y = 0$, puisque le point de coordonnées (x, y) appartient à Δ si et seulement si le point de coordonnées $(x, -y)$ appartient à Δ'.

On obtient :

$$d(m, \Delta) = \frac{|\alpha x + \beta y|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \text{et} \quad d(m, \Delta') = \frac{|\alpha x - \beta y|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} d(m, \Delta) = d(m, \Delta') &\iff |\alpha x + \beta y| = |\alpha x - \beta y| \\ &\iff \begin{cases} \alpha x + \beta y = \alpha x - \beta y \\ \text{ou} \\ \alpha x + \beta y = \beta y - \alpha x \end{cases} \\ &\iff (\beta y = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha x = 0). \end{aligned}$$

Comme nous avons supposé les droites Δ et Δ' distinctes on a

$$\alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta \neq 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} d(m, \Delta) = d(m, \Delta') &\iff y = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0 \\ &\iff m \in \Delta_1 \quad \text{ou} \quad m \in \Delta_2. \end{aligned}$$

c) **Angles de droites dans E_n.**

On peut définir l'angle de deux droites de E_n comme étant l'angle de leurs directions dans $\mathcal{E}_n$. On peut définir aussi le Cosinus de cet angle sans qu'il soit nécessaire d'orienter l'espace.

EXERCICE

2. On considère dans E_3 les droites Δ_1 et Δ_2 définies respectivement par

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x - y - z = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 4x + 5y + 2z = 3. \end{cases}$$

Déterminer le Cosinus de l'angle de Δ_1 et de Δ_2.

d) **Angle d'une droite et d'un plan dans E_3.**

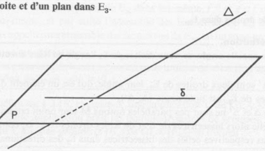


fig. 8

Définition.

Étant donnés une droite Δ et un plan P de E_3 non orthogonaux, on appelle **angle** de Δ et de P l'angle de Δ et de la droite δ projection orthogonale de Δ sur P (fig. 8). Lorsque Δ et P sont orthogonaux on dit que l'angle de Δ et de P est droit.

e) **Angle de deux plans de E_3.**

Définition.

On appelle **angle** de deux plans de E_3 l'angle de leurs directions dans $\mathcal{E}_3$.

EXERCICES

3. Montrer que l'angle de deux plans de E_3 est égal à l'angle de deux quelconques de leurs normales.

4. Soient P_1 et P_2 deux plans de E_3, non parallèles, et D leur intersection.
Si M est un point de D, notons D_1 (resp. D_2) la droite de P_1 (resp. P_2) contenant M et orthogonale à D.
Montrer que l'angle de P_1 et de P_2 est égal à l'angle de D_1 et de D_2.

II. Isométries

6. 8 SYMÉTRIES ORTHOGONALES

Rappelons la définition donnée dans la section I de ce chapitre :

Définition.

Soient E_n un espace affine euclidien associé à un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_n$, et E' une variété linéaire affine de E, non vide, de direction $\mathcal{E}'$.
On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à E', la symétrie de base E' et de direction $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}'^{\perp}$.

L'application linéaire associée à cette symétrie orthogonale est évidemment la symétrie orthogonale vectorielle de $\mathcal{E}_n$ de base $\mathcal{E}'$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des symétries orthogonales :

Théorème.

Soit E_n un espace affine euclidien. Une isométrie de E_n est involutive si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

Soit f une isométrie de E_n et l l'application linéaire associée à f.

• Si f est involutive, l l'est aussi. Par suite l est une transformation orthogonale involutive de $\mathcal{E}_n$, donc est une symétrie orthogonale vectorielle de $\mathcal{E}_n$ (cf. § 4.7). Comme f est une application affine involutive de E_n dans lui-même, on sait que f est une symétrie par rapport à une variété linéaire affine E' non vide de E_n (cf. § 3.24 b); l étant la symétrie orthogonale vectorielle par rapport à la direction $\mathcal{E}'$ de E', f est la symétrie orthogonale par rapport à E'.

• Réciproquement, montrons qu'une symétrie orthogonale est une isométrie involutive de E_n.
C'est une application involutive puisque c'est une symétrie. C'est une isométrie car l'application linéaire associée est une symétrie orthogonale vectorielle de $\mathcal{E}_n$, donc une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_n$.

REMARQUE

Id_{E_n} est la symétrie orthogonale par rapport à E_n.

6. 9 SYMÉTRIES ORTHOGONALES HYPERPLANES

Nous avons vu que, parmi les transformations orthogonales d'un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_n$, les symétries orthogonales vectorielles hyperplanes ont un rôle très important. Il va en être de même, parmi les isométries d'un espace affine euclidien E_n, des symétries orthogonales par rapport à un hyperplan de E_n, symétries que nous appellerons symétries orthogonale hyperplanes.

Définition.

Étant donné un espace affine euclidien E_n, on dit qu'une application s de E_n est une **symétrie orthogonale hyperplane** si s est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E_n.

Lorsque $n = 2$, les hyperplans de E_2 sont les droites de E_2. On parlera alors de **symétrie orthogonale axiale.**

Lorsque $n = 3$, les hyperplans de E_3 sont les plans de E_3. On parlera alors de **symétrie orthogonale plane.**

Théorème

Une symétrie orthogonale hyperplane de E_n est une isométrie négative.

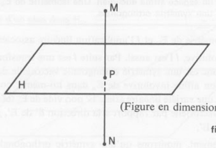
En effet, l'application linéaire qui lui est associée est une symétrie orthogonale hyperplane de $\mathcal{E}_n$ donc est un élément de $O^-(\mathcal{E}_n)$.

Détermination d'une symétrie orthogonale hyperplane.

Théorème et définition.

Si M et N sont deux points distincts d'un espace affine euclidien E_n il existe une et une seule symétrie orthogonale hyperplane s telle que s (M) = N. L'hyperplan H de E_n, base de s, est appelé **l'hyperplan médiateur** de M et de N.
L'hyperplan H de E_n, base de s, est appelé **hyperplan médiateur** de M et de N.

Montrons d'abord l'unicité de s.
Soit P le milieu de M et de N; s étant une symétrie échangeant M et N, on a s (P) = P (cf. § 3.24 b). Il en résulte que H est nécessairement l'hyperplan contenant P et orthogonal à la droite (MN), ce qui prouve l'unicité de s.



(Figure en dimension 3)

fig. 9

Considérons alors la symétrie orthogonale s par rapport à l'hyperplan H contenant P et orthogonal à (MN) (fig. 9). P étant la projection de M sur H, on a $s(M) = M + 2\overrightarrow{MP}$; or P est le milieu de M et de N, donc $2\,\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN}$ et $s(M) = N$, ce qui montre que s répond à la question.

REMARQUE

Lorsque $n = 2$, H est une droite appelée **médiatrice** de M et de N.
Lorsque $n = 3$, H est un plan appelé **plan médiateur** de M et de N.

Théorème.

Étant donnés deux points distincts M et N de E_n l'hyperplan médiateur H de M et de N est l'ensemble des points équidistants de M et de N, c'est-à-dire l'ensemble
$\{Q \mid Q \in E_n,\ d(Q, M) = d(Q, N)\}$.

• Si P est le milieu de M et de N, on a, pour tout point Q de H :

$$d(Q, M)^2 = \|\overrightarrow{QM}\|^2 = \|\overrightarrow{QP}\|^2 + \|\overrightarrow{PM}\|^2$$

puisque $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{PM}$ sont orthogonaux.
De même :

$$d(Q, N)^2 = \|\overrightarrow{QN}\|^2 = \|\overrightarrow{QP}\|^2 + \|\overrightarrow{PM}\|^2.$$

De l'égalité

$$\|\overrightarrow{PM}\| = \|\overrightarrow{PN}\|,$$

il résulte alors que l'on a

$$\forall Q \in H \qquad d(Q, M) = d(Q, N)$$

donc

$$H \subset \{Q \mid Q \in E_n \quad d(Q, M) = d(Q, N)\}.$$

• Montrons maintenant que l'ensemble $\{Q \mid Q \in E_n\ d(Q, M) = d(Q, N)\}$ est une variété linéaire affine de E_n.
Pour cela nous allons vérifier que cet ensemble contient tout barycentre de ses éléments.
Considérons donc une famille $(Q_i)_{i \in I}$ de points de E_n équidistants de M et de N, et une famille $(\alpha^i)_{i \in I}$ de réels, à support fini, telle que $\sum_{i \in I} \alpha^i \neq 0$. Si Q est le barycentre des points Q_i affectés des coefficients α^i, on a, d'après § 6.1 c,

$$\sum_{i \in I} \alpha^i \|\overrightarrow{MQ_i}\|^2 = \Big(\sum_{i \in I} \alpha^i\Big) \|\overrightarrow{MQ}\|^2 + \sum_{i \in I} \alpha^i \|\overrightarrow{QQ_i}\|^2$$

et

$$\sum_{i \in I} \alpha^i \|\overrightarrow{NQ_i}\|^2 = \Big(\sum_{i \in I} \alpha^i\Big) \|\overrightarrow{NQ}\|^2 + \sum_{i \in I} \alpha^i \|\overrightarrow{QQ_i}\|^2$$

Or,

$$\forall i \in I \qquad \|\overrightarrow{MQ_i}\| = \|\overrightarrow{NQ_i}\|;$$

par suite :

$$\Big(\sum_{i \in I} \alpha^i\Big) \|\overrightarrow{MQ}\|^2 = \Big(\sum_{i \in I} \alpha^i\Big) \|\overrightarrow{NQ}\|^2,$$

ce qui implique, $\sum_{i \in I} \alpha^i$ n'étant pas nul,

$$\|\overrightarrow{MQ}\| = \|\overrightarrow{NQ}\|$$

et donc, Q est équidistant de M et de N.

• En conclusion, l'ensemble $\{Q \mid Q \in E_n,\, d(M, Q) = d(N, Q)\}$ est une variété linéaire affine de E contenant l'hyperplan H; on a donc, a priori, deux possibilités :

(i) ou bien elle est égale à E_n

(ii) ou bien elle est égale à H.

Elle ne peut être égale à E_n car M et N, étant distincts, ne lui appartiennent manifestement pas. On a donc finalement :

$$H = \{Q \mid \in E_n,\, d(Q, M) = d(Q, N)\}.$$

EXERCICE

Supposons E_n de dimension n égale à 2 ou 3 et soit $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ un repère orthonormé de E_n. Montrer que l'ensemble des points $Q(x_1, \ldots, x_n)$, équidistants de M et de N, peut être représenté analytiquement par une équation de la forme

$$\alpha^1 x_1 + \ldots + \alpha^n x_n + \beta = 0.$$

En conclure que cet ensemble est un hyperplan de E_n et retrouver ainsi le résultat précédent.

6. 10 DÉCOMPOSITION D'UNE ISOMÉTRIE

E_n désigne un espace affine euclidien de dimension n ($n \leqslant 3$) associé à l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_n$. Rappelons que, si $M \in E_n$, l'application $\vec{u} \longmapsto M + \vec{u}$ de $\mathcal{E}_n$ dans E_n est une bijection, et que, au moyen de cette bijection, on peut munir E_n d'une structure d'espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{E}_n$, admettant M pour élément neutre. L'ensemble E_n muni de cette structure est noté (E_n, M) (cf. § 3.9). $\mathcal{E}_n$ étant un espace vectoriel euclidien, on peut évidemment aussi transporter à (E_n, M) sa structure euclidienne, et la bijection précédente devient, dans ce cas, un isomorphisme d'espaces vectoriels euclidiens.

Nous avons vu aux § 3.13 a et § 3.15 que les sous-espaces vectoriels de (E_n, M) correspondent aux variétés linéaires affines de E_n contenant M, et que, si f est une application affine de E_n dans lui-même laissant M invariant, l'application

$$f_M : (E_n, M) \to (E_n, M), \quad N \longmapsto f(N)$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel (E_n, M). Si de plus (E_n, M) est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien (isomorphe à $\mathcal{E}_n$), nous obtenons :

Si f est une isométrie de E_n laissant M invariant, f_M est une transformation orthogonale de (E_n, M).

Ce résultat est très important et sera souvent utilisé dans la suite de ce chapitre.

Le résultat énoncé au § 4.9 concernant la décomposition des transformations orthogonales d'un espace vectoriel euclidien de dimension n ($n \leqslant 3$), va nous permettre de démontrer :

Théorème.

Étant donnés un espace affine euclidien E_n de dimension n, et une isométrie f de E_n, il existe un entier p, $p \leqslant n + 1$, tel que

(i) f est la composée de p symétries orthogonales hyperplanes.

(ii) Si f a au moins un point invariant, p est inférieur ou égal à n et la variété linéaire affine F des points invariants de f est de dimension $n - p$.

1. Supposons que f ait au moins un point invariant M. Alors f_M est une transformation orthogonale de (E_n, M) et d'après le théorème de décomposition du paragraphe 4.9, on peut écrire

$$f_M = \sigma_p \circ \ldots \circ \sigma_1$$

où $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ sont des symétries orthogonales vectorielles hyperplanes de (E_n, M) et p un entier tel que $n - p$ soit la dimension du sous-espace des vecteurs invariants de f_M. Si $\forall\, i \in \{1, \ldots, p\}$ on note s_i la symétrie orthogonale hyperplane de E_n laissant M invariant et telle que

$$s_{iM} = \sigma_i,$$

on a
$$\sigma_p \circ \ldots \circ \sigma_1 = s_{pM} \circ \ldots \circ s_{1M} = (s_p \circ \ldots \circ s_1)_M$$

d'où
$$f_M = (s_p \circ \ldots \circ s_1)_M$$

et
$$f = s_p \circ \ldots \circ s_1.$$

En tant que parties de E_n, la variété linéaire affine F des points invariants de f et le sous-espace des vecteurs invariants de f_M sont confondues; il en résulte que $\dim F = n - p$, ce qui implique $p \leqslant n$.

2. Supposons que f n'ait aucun point invariant. Alors, soit M un point de E_n et s l'unique symétrie orthogonale hyperplane de E_n telle que $s(M) = f(M)$.

La composée $s \circ f$ est une isométrie de E_n telle que $s \circ f(M) = M$, donc on peut écrire, d'après 1.,

$$s \circ f = s_p \circ \ldots \circ s_1$$

où $s_1, \ldots, s_p$ sont des symétries orthogonales hyperplanes de E_n et p un entier inférieur ou égal à n.

On obtient alors :

$$f = s \circ s_p \circ \ldots \circ s_1,$$

autrement dit f est la composée d'au plus $n + 1$ symétries orthogonales hyperplanes de E_n.

REMARQUES

1. L'entier p n'est nul que si $f = \mathrm{Id}_E$.
2. Les isométries ayant au moins un point invariant étant particulièrement intéressantes, nous remarquerons que toute isométrie de E_n s'obtient en composant une isométrie, ayant un point invariant que l'on peut choisir arbitrairement, et une translation. En effet si f est une isométrie de E_n et M un point de E on a

$$f = t_{\vec{u}} \circ g$$

où
$$\vec{u} = f(M) - M$$

et
$$g = t_{-\vec{u}} \circ f$$

est bien une isométrie de E_n laissant M invariant puisque

$$g(M) = t_{-\vec{u}}(f(M)) = f(M) + (M - f(M)) = M.$$

Corollaire

Une isométrie f de E_n est une isométrie positive si et seulement si f est la composée d'un nombre pair de symétries orthogonales hyperplanes.

En effet, si $f = s_p \circ \ldots \circ s_1$ où $s_1, \ldots, s_p$ sont des symétries orthogonales hyperplanes de E_n, on a en désignant par $l, \sigma_1, \ldots, \sigma_p$ les applications linéaires associées respectivement aux applications affines $f, s_1, \ldots, s_p$,

$$l = \sigma_p \circ \ldots \circ \sigma_1.$$

$\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ sont des symétries orthogonales vectorielles hyperplanes de $\mathcal{E}_n$, par suite

$$l \in O^+(\mathcal{E}_n) \iff p \text{ pair} \quad (\text{cf. § 5.2, Théorème 1}).$$

Comme, par définition, f est une isométrie positive si et seulement si l appartient à $O^+(\mathcal{E}_n)$, on a bien le résultat annoncé.

III. Isométries de E_n, $n = 1, 2, 3$

6. 11 ISOMÉTRIES DE E_1

Soit f une isométrie de E_1 et l l'application linéaire associée à f. l étant une transformation orthogonale de E_1, on a

- soit $l = Id_{\mathcal{E}_1}$
- soit $l = -Id_{\mathcal{E}_1}$.

Si $l = Id_{\mathcal{E}_1}$, nous savons que f est une translation de E_1.
Si $l = -Id_{\mathcal{E}_1}$, f est une homothétie de E_1 de rapport -1, donc une symétrie par rapport à un point de E_1.
En conclusion on a :

Théorème.
Le groupe des isométries de E_1 se compose
(i) Des translations (isométries positives)
(ii) Des symétries par rapport aux points de E_1 (isométries négatives).

EXERCICE

Étant donnés deux points M et N de E_1, quelles sont les isométries f de E_1 telles que $f(M) = N$.

6. 12 ISOMÉTRIES DE E_2

Nous désignerons par f une isométrie de E_2, par l l'application linéaire associée à f ($l \in O(\mathcal{E}_2)$), et par F la variété linéaire affine des points invariants de f (qui si elle n'est pas vide a pour direction, rappelons-le, le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de l).

a) Isométries positives de E_2.

D'après le théorème de décomposition (cf. § 6.10) et son corollaire il y a trois cas possibles :

- dim F = 2 et alors $f = Id_{E_2}$.
- dim F = 0 et f est la composée de deux symétries orthogonales axiales de E_2
- F = ∅ et f est la composée de deux symétries orthogonales axiales de E_2.

Nous allons étudier en détail les deux derniers cas.

1. dim F = 0.
Alors f a un seul point invariant M (F = {M}). Il en résulte que l est une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_2$ admettant $\vec{0}$ pour seul vecteur invariant; par conséquent l est une rotation vectorielle de $\mathcal{E}_2$ distincte de l'identité.

Nous dirons dans ce cas :

Définition.
Si f est une isométrie de E_2 n'ayant qu'un seul point invariant M, on dit que f est **une rotation de centre** M.

REMARQUE

f_M est alors une rotation vectorielle de (E_2, M) distincte de l'identité.

EXERCICE

1. Montrer que l'ensemble ayant pour éléments Id_{E_2} et les rotations de centre M est un sous-groupe abélien de $Is^+(E_2)$.

Si φ, élément du groupe $\mathcal{A}$ des angles de demi-droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$, est l'angle de la rotation vectorielle l, l'image N' par f d'un point N de E_2 est caractérisée par :

$$\text{angle}\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN'}\right) = \varphi \quad \text{et} \quad \left\|\overrightarrow{MN'}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$$

puisque
$$N' = f(N) \iff l\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{MN'}.$$

On dit que

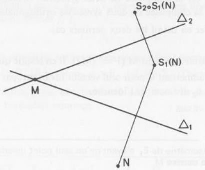
f est **la rotation de centre M et d'angle** φ.

Il résulte de la démonstration du théorème de décomposition que f est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites contenant M, et ceci parce que f_M est la composée de deux symétries orthogonales vectorielles axiales de (E_2, M). Mais nous avons vu au § 4.11 c que l'une de ces symétries vectorielles peut être choisie arbitrairement; on peut donc énoncer :

Théorème.
Dans E_2 toute rotation de centre M est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites contenant M, l'une d'elles pouvant être choisie arbitrairement.

Considérons réciproquement deux droites distinctes Δ_1, Δ_2, non parallèles, de E_2, et les symétries orthogonales s_1, s_2 par rapport à ces droites.

fig. 10



Notons M le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2, et $\dot\psi$ l'angle des droites Δ_1, Δ_2 ($\dot\psi$ est un élément du groupe $\mathcal{A}'$ des angles de droites vectorielles de $\mathcal{E}_2$) (fig. 10).

• M est le seul point invariant de $s_2 \circ s_1$.

En effet si σ_i désigne l'application linéaire associée à s_i (σ_i est la symétrie orthogonale par rapport à la direction de Δ_i), la variété linéaire affine des points invariants de $s_2 \circ s_1$ n'est pas vide (elle contient M car $s_2 \circ s_1(M) = s_2(M) = M$) et a pour direction le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de $\sigma_2 \circ \sigma_1$.

Les droites Δ_1 et Δ_2 n'étant pas parallèles, leurs directions sont distinctes et, par suite, $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est une rotation vectorielle de $\mathcal{E}_2$ distincte de l'identité. Il en résulte que $\vec{0}$ est le seul vecteur invariant de $\sigma_2 \circ \sigma_1$ et que la variété linéaire affine des points invariants de $s_2 \circ s_1$ est $\{M\}$.

• Alors $s_2 \circ s_1$ est une rotation de centre M ayant pour angle l'angle de la rotation vectorielle $\sigma_2 \circ \sigma_1$. Or, nous avons vu au § 5.6 b que, $\dot\psi$ étant l'angle des directions de Δ_1 et de Δ_2, l'angle de $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est $\mu(\dot\psi) = \psi + \psi$ (ψ étant un représentant quelconque dans $\mathcal{A}$ de $\dot\psi$).

On obtient :

Théorème.

Étant données deux droites distinctes non parallèles Δ_1, Δ_2 de E_2, l'application $s_2 \circ s_1$, où s_i est la symétrie orthogonale par rapport à Δ_i ($i = 1, 2$), est la rotation ayant pour centre le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2, et d'angle $\varphi = \mu(\dot\psi)$ où $\dot\psi$ = angle (Δ_1, Δ_2).

EXERCICES

2. Utiliser ce résultat pour donner une démonstration, différente de celle du cours, du théorème suivant : une rotation de centre M est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites contenant M, l'une d'elles pouvant être choisie arbitrairement.

3. Soit f_1 (resp. f_2) la rotation de centre M_1 (resp. M_2) d'angle φ_1 (resp. φ_2), M_1 et M_2 étant distincts. Nous supposerons $\varphi_1 + \varphi_2 \neq \omega$.
On désigne par Δ la droite (M_1M_2) et par s la symétrie orthogonale par rapport à Δ. Montrer que l'on peut écrire

$$f_1 = s \circ s_1 \quad , \quad f_2 = s_2 \circ s$$

où s_1 et s_2 sont des symétries orthogonales par rapport à des droites Δ_1, Δ_2 que l'on déterminera. En déduire que $f_2 \circ f_1$ est une rotation vectorielle ayant pour centre le point d'intersection de Δ_1 et Δ_2 et d'angle $\varphi_1 + \varphi_2$.
(Faire une figure.)

2. $F = \varnothing$.

Alors f est la composée de deux symétries orthogonales s_1, s_2 par rapport à des droites Δ_1, Δ_2 de E_2 : $f = s_2 \circ s_1$.

Δ_1 et Δ_2 n'ont aucun point commun; sinon il y aurait deux cas possibles :

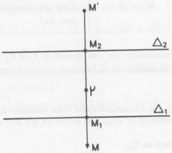
• $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{M\}$ et f serait une rotation de centre M. On aurait dans ce cas $F = \{M\}$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

• $\Delta_1 = \Delta_2$ et f serait l'identité, ce qui impliquerait $F = E_2$.

En conséquence Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

Notons $\vec{u}$ le vecteur orthogonal à la direction commune de Δ_1 et Δ_2 tel que $t_{\vec{u}}(\Delta_1) = \Delta_2$.

fig. 11



Soient M_1 et M_2 les projections orthogonales de M sur Δ_1 et Δ_2 (fig. 11). Si $\mu = s_1(M)$ et $M' = s_2(\mu)$, on a

• M_1 est le milieu de M et de μ.

• M_2 est le milieu de μ et de M'.

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{M\mu} + \overrightarrow{\mu M'}\\ &= 2\,\overrightarrow{M_1\mu} + 2\,\overrightarrow{\mu M_2}\\ &= 2\,\overrightarrow{M_1M_2}\\ &= 2\vec{u},\end{aligned}$$

autrement dit $s_2 \circ s_1$ est la translation $t_{2\vec{u}}$. On peut donc conclure :

Théorème.

Une isométrie positive de E_2 n'a aucun point invariant si et seulement si c'est une translation de vecteur non nul.

et plus précisément :

Théorème.

La composée $s_2 \circ s_1$ de deux symétries orthogonales s_1, s_2 par rapport à deux droites parallèles Δ_1, Δ_2 est une translation $t_{\vec{v}}$, où $\vec{v} = 2\vec{u}$, $\vec{u}$ étant le vecteur orthogonal à la direction de Δ_1 et Δ_2 tel que

$$t_{\vec{u}}(\Delta_1) = \Delta_2.$$

EXERCICE

4. Établir la réciproque : montrer que toute translation est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites parallèles convenablement choisies.

3. Tableau récapitulatif.

ISOMÉTRIES POSITIVES DE E_2	
$\dim F = 2$	$f = \mathrm{Id}_{E_2}$
$\dim F = 0$	$F = \{M\}$ et f est une rotation de centre M d'angle non nul
$F = \varnothing$	f est une translation de vecteur non nul

Il en résulte en particulier qu'une isométrie f de E_2 est une rotation ayant pour centre un point de E si et seulement si l est une rotation vectorielle distincte de l'identité.

EXERCICE

5. Montrer que l'ensemble ayant pour éléments Id_{E_2} et les rotations de E_2 n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{Is}^+(E_2)$. (On montrera que ce n'est pas une partie stable pour la loi o).

b) Isométries négatives de E_2.

Il n'y a cette fois que deux cas possibles :

- $\dim F = 1$ et f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite F.
- $F = \varnothing$ et f est la composée de trois symétries orthogonales axiales.

Nous allons établir :

Théorème.

Toute isométrie négative f de E_2 est, de manière unique, la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ de E_2 et d'une translation de vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}$ appartenant à la direction de Δ. De plus ces deux applications commutent.

Pour démontrer ce résultat nous utiliserons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ adapté au problème et nous donnerons la représentation matricielle (1) de f dans ce repère.

Ensuite nous supposerons qu'il existe une décomposition de f répondant à la question et nous en déduirons une seconde représentation matricielle (2) de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

De la comparaison de (1) et de (2) résultera alors l'existence et l'unicité de la solution.

(i) *Choix d'un repère.*

L'application linéaire l associée à f est une transformation orthogonale négative de $\mathcal{E}_2$, donc est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle D de $\mathcal{E}_2$.

Considérons alors un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2 tel que $\vec{i} \in D$.

(ii) *Représentation matricielle de f.*

La matrice de l dans la base orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ de $\mathcal{E}_2$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

puisque $\vec{i} \in D$ et que $\vec{j}$ est orthogonal à D. On a alors, en notant $(x; y)$ les coordonnées d'un point M et (x', y') les coordonnées de $M' = f(M)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

où (α, β) sont les coordonnées de $O' = f(O)$. Autrement dit :

$$(1) \quad \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = -y + \beta. \end{cases}$$

(iii) Supposons maintenant qu'il existe une décomposition $t_{\vec{u}} \circ s$ de f répondant à la question.

Si P est un point de Δ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de Δ, on a :

$$f(P + \vec{v}) = (P + \vec{v}) + \vec{u} = (P + \vec{u}) + \vec{v} = f(P) + \vec{v}.$$

Par suite $l(\vec{v}) = \vec{v}$. Tous les vecteurs appartenant à la direction de Δ sont donc invariants par l; cette direction est donc D.

Alors dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ Δ a une équation de la forme $y = b$, et $\vec{u}$ a pour coordonnées $(a, 0)$ (fig. 12).

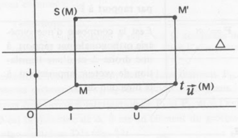


fig. 12

$(\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \overrightarrow{OJ} = \vec{j}, \overrightarrow{OU} = \vec{u})$

Si un point M de E_2 a pour coordonnées (x, y), le point $s(M)$ a pour coordonnées $(x, 2b - y)$, et le point $M' = t_{\vec{u}} \circ s(M)$ a pour coordonnées (x', y') telles que

$$(2) \quad \begin{cases} x' = x + a \\ y' = 2b - y. \end{cases}$$

De même $t_{\vec{u}}(M)$ a pour coordonnées $(x + a, y)$ et $s \circ t_{\vec{u}}(M)$ a pour coordonnées

$$(x + a,\ 2b - y),$$

ce qui prouve que $s \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s$.

(iv) *Conclusion.*

Il résulte alors de (1) et de (2) que, étant donnée f, il existe exactement une symétrie orthogonale axiale s et une translation $t_{\vec{u}}$ répondant à la question :

- s est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ d'équation $y = \frac{\beta}{2}$.
- $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\alpha, 0)$.

REMARQUE

Lorsque dim F = 1, on a évidemment $\Delta = F$ et $\vec{u} = \vec{0}$.

EXERCICE

6. Soient M_1, M_2, M_3 trois points distincts non alignés de E_2 et Δ_1, Δ_2, Δ_3 les droites (M_2M_3), (M_3M_1), (M_1M_2).
On note s_1, s_2, s_3 les symétries orthogonales par rapport à Δ_1, Δ_2, Δ_3.
(i) Déduire du théorème précédent que l'on peut écrire
$$s_3 \circ s_2 \circ s_1 = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$$
où σ_1, σ_2, σ_3 sont des symétries orthogonales par rapport à des droites D_1, D_2, D_3 telles que : D_1 et D_2 sont parallèles et orthogonales à D_3.
(ii) *Construction géométrique.*
Notons Δ'_2 la droite contenant M_3 orthogonale à Δ_3 et s'_2 la symétrie orthogonale par rapport à Δ'_2.
Montrer que la rotation $s_2 \circ s_1$ de centre M_3 peut s'écrire $s'_2 \circ s'_1$ où s'_1 est une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ'_1 convenablement choisie.
De même montrer que l'on peut écrire $s_3 \circ s'_2 = s'_3 \circ s''_2$ où s''_2 et s'_3 sont des symétries orthogonales par rapport à des droites Δ'_3 et Δ''_2 telles que Δ''_2 et Δ'_1 soient parallèles.
Conclure que l'on a $$s_3 \circ s_2 \circ s_1 = s'_3 \circ s''_2 \circ s'_1$$
avec : Δ'_1 et Δ''_2 sont parallèles et orthogonales à Δ'_3.

Tableau récapitulatif.

ISOMÉTRIES NÉGATIVES DE E_2	
dim F = 1	f est la symétrie orthogonale par rapport à F
F = ∅	f est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ et d'une translation de vecteur appartenant à la direction de Δ

6. 13 ISOMÉTRIES DE E_3

Nous désignerons par f une isométrie de E_3, par l l'application linéaire associée à f ($l \in O(\mathcal{E}_3)$), et par F la variété linéaire affine des points invariants de f (qui si elle n'est pas vide a pour direction le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de l).

a) Isométries positives de E_3.

D'après le théorème de décomposition (cf. § 6.10) et son corollaire, il y a trois cas possibles :

- dim F = 3 et alors $f = Id_{E_3}$.
- dim F = 1 et f est la composée de deux symétries orthogonales planes de E_3.
- F = ∅ et f est la composée de deux ou de quatre symétries orthogonales planes de E_3.

1. dim F = 1.
L'application linéaire l associée à f est dans ce cas une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_3$ admettant comme seuls éléments invariants les vecteurs de la droite vectorielle D direction de F.
Par conséquent, l est une rotation vectorielle d'axe D.

Nous dirons alors :

Définition.
Si f est une isométrie de E_3 ayant pour seuls invariants les points d'une droite F, on dit que f est **une rotation d'axe** F.

Si φ est l'angle de la rotation vectorielle l de $\mathcal{E}_3$ (φ est un élément du groupe des angles de demi-droites vectorielles du plan vectoriel $D^\perp$ de $\mathcal{E}_3$), on dit que

f est **la rotation d'axe** F **et d'angle** φ.

REMARQUE

Lorsque $\mathcal{E}_3$ (et par conséquent E_3) est orienté, on peut orienter D (et donc F) et $D^\perp$ de sorte que l'orientation de $D^\perp$ soit compatible avec celle de D.
Dans ce cas si $\hat{\varphi}$ est la mesure de φ, nous dirons par abus de langage :
« f est la rotation d'axe orienté F et d'angle $\hat{\varphi}$ ». Usuellement on fait un second abus de langage qui consiste à remplacer la mesure $\hat{\varphi}$ de φ par une de ses déterminations.

Il résulte de la démonstration du théorème de décomposition que f est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des plans contenant F :
en effet si M est un point de F, f_M est une rotation vectorielle de (E_3, M) d'axe F (F étant considéré comme droite vectorielle de (E_3, M)) et nous avons vu que f_M est la composée de deux symétries orthogonales de (E_3, M) par rapport à des plans contenant F (cf. § 4.12 b). Comme une de ces symétries vectorielles peut être choisie arbitrairement, on peut énoncer :

Théorème.
Dans E_3 toute rotation d'axe F est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des plans contenant F, l'une d'elle pouvant être choisie arbitrairement.

Considérons réciproquement deux plans distincts P_1, P_2, non parallèles, de E_3, et les symétries orthogonales s_1, s_2 par rapport à ces plans.
Notons Δ la droite d'intersection de P_1 et P_2, et ψ l'angle de P_1 et de P_2 (rappelons que, si D est la direction de Δ, ψ est un élément du groupe des angles de droites vectorielles du plan euclidien $D^\perp$) (fig. 13).

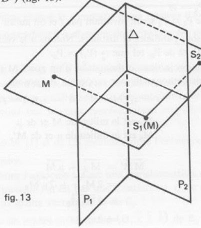


fig. 13

• L'ensemble des points invariants de $s_2 \circ s_1$ est Δ. En effet, d'une part tout point de Δ étant invariant par s_1 et s_2 l'est par $s_2 \circ s_1$; d'autre part on sait que la variété linéaire affine des points invariants de $s_2 \circ s_1$, n'étant pas vide, a pour direction le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants de l'application linéaire associée à $s_2 \circ s_1$.
Alors si σ_i est l'application linéaire associée à s_i $(i = 1, 2)$, σ_i est la symétrie orthogonale par rapport à la direction de P_i et il résulte du théorème 2 de § 4.12 b que $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est une rotation vectorielle d'axe D et donc que D est le sous-espace des vecteurs invariants de $\sigma_2 \circ \sigma_1$. En conclusion la variété linéaire affine des points invariants de $s_2 \circ s_1$ est une droite, c'est donc Δ.

• Nous pouvons alors en déduire que $s_2 \circ s_1$ est une rotation d'axe Δ qui a pour angle l'angle de la rotation vectorielle $\sigma_2 \circ \sigma_1$.
L'angle des directions de P_1 et de P_2 étant ψ, l'angle de $\sigma_2 \circ \sigma_1$ est $\mu(\psi)$ (cf. § 5.7 c); on peut donc énoncer :

Théorème.
Étant donnés deux plans distincts non parallèles P_1, P_2, l'application $s_2 \circ s_1$, où s_i est la symétrie orthogonale par rapport à P_i $(i = 1, 2)$, est la rotation ayant pour axe la droite Δ d'intersection de P_1 et de P_2, et d'angle $\mu(\psi)$ où $\psi = \text{angle}(P_1, P_2)$.

EXERCICES

1. Montrer que l'ensemble ayant pour éléments les rotations d'axe F et l'application identique de E_3 est un sous-groupe abélien de $Is^+(E_3)$.
2. Soient f_1 et f_2 deux rotations d'axes F_1, F_2 distincts et coplanaires. Montrer que $f_2 \circ f_1$ est une rotation dont on déterminera l'axe.
(Indication : on notera P le plan contenant F_1 et F_2, et s la symétrie orthogonale par rapport à P. On montrera que l'on peut écrire

$$f_1 = s \circ s_1$$
$$f_2 = s_2 \circ s$$

où s_1 et s_2 sont des symétries orthogonales convenablement choisies.)

2. $F = \varnothing$.
Dans ce cas f est la composée de 2 ou de 4 symétries orthogonales planes de E_3.
• Si f est la composée de 2 symétries orthogonales par rapport à des plans P_1 et P_2 de E_3, on a $P_1 \cap P_2 = \varnothing$:
sinon tout point de $P_1 \cap P_2$ serait invariant par f et on aurait $F \neq \varnothing$.
Par suite P_1 et P_2 sont parallèles et distincts. Notons $\vec{u}$ le vecteur orthogonal à la direction commune de P_1 et de P_2, tel que $t_{\vec{u}}(P_1) = P_2$.
Soient M_1 et M_2 les projections orthogonales d'un point M sur P_1 et P_2 (fig. 14).
Si s_i est la symétrie orthogonale par rapport à P_i, posons

$$\mu = s_1(M) \quad \text{et} \quad M' = s_2(\mu) = f(M).$$

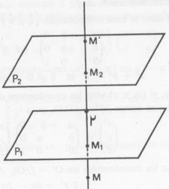
On a :

M_1 est le milieu de M et de μ
M_2 est le milieu de μ et de M',

il en résulte que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{M\mu} + \overrightarrow{\mu M'}\\ &= 2\,\overrightarrow{M_1\mu} + 2\,\overrightarrow{\mu M_2}\\ &= 2\,\overrightarrow{M_1M_2}\\ &= 2\vec{u},\end{aligned}$$

fig. 14



autrement dit $f = s_2 \circ s_1$ est la translation $t_{2\vec{u}}$. En conclusion :

Théorème.
La composée $s_2 \circ s_1$ de deux symétries orthogonales s_1, s_2 par rapport à deux plans parallèles P_1, P_2 est une translation $t_{\vec{v}}$, où $\vec{v} = 2\vec{u}$, $\vec{u}$ étant le vecteur orthogonal à la direction de P_1 et P_2 tel que $t_{\vec{u}}(P_1) = P_2$.

EXERCICE

3. Montrer réciproquement que toute translation est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des plans parallèles.

• Supposons maintenant que f ne soit pas une translation : f est alors la composée de 4 symétries orthogonales planes.
Nous nous proposons de montrer que, dans ce cas :

f est de manière unique la composée d'une rotation d'axe Δ et d'une translation $t_{\vec{u}}$, le vecteur $\vec{u}$ appartenant à la direction de Δ. De plus ces deux applications commutent.

Pour démontrer ce résultat nous utiliserons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ adapté au problème, et nous donnerons la représentation matricielle (1) de f dans ce repère. Ensuite nous supposerons qu'il existe une décomposition de f répondant à la question et nous en déduirons une seconde représentation matricielle (2) de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
De la comparaison de (1) et de (2) résultera alors l'existence et l'unicité de la solution.

(i) *Choix d'un repère.*
L'application linéaire l associée à f est une transformation orthogonale positive de $\mathcal{E}_3$, distincte de $Id_{\mathcal{E}_3}$ (puisque f n'est pas une translation), donc est une rotation vectorielle ayant pour axe une droite vectorielle D de $\mathcal{E}_3$.
Considérons alors un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E_3 tel que $\vec{k} \in D$.

(ii) *Représentation matricielle de f.*

La matrice de l dans la base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de $\mathcal{E}_3$ est :

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(cf. § 4.12 b)}$$

avec $\quad a^2 + b^2 = 1 \quad \text{et} \quad b \neq 0 \quad (\text{puisque } l \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_3}).$

Il en résulte que, si (x, y, z) sont les coordonnées d'un point M de E_3 et (x', y', z') les coordonnées de son image $M' = f(M)$, on a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

où (α, β, γ) sont les coordonnées de $O' = f(O)$. Autrement dit :

$$(1) \quad \begin{cases} x' = ax - by + \alpha \\ y' = bx + ay + \beta \\ z' = z + \gamma. \end{cases}$$

(iii) Supposons maintenant qu'il existe une décomposition $t_{\vec{u}} \circ \rho$ de f répondant à la question.

Soit Δ l'axe de la rotation ρ. Si P est un point de Δ et $\vec{v}$ un vecteur appartenant à la direction de Δ, on a

$$f(M + \vec{v}) = (M + \vec{v}) + \vec{u} = (M + \vec{u}) + \vec{v}$$
$$= f(M) + \vec{v}.$$

Par suite tout vecteur de la direction de Δ est invariant par l, cette direction est donc D.

Alors dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Δ est représentée par un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu, \end{cases}$$

et $\vec{u}$ a pour coordonnées $(0, 0, \nu)$ (fig. 15).

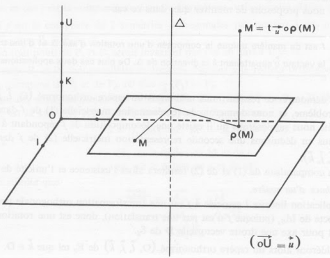


fig. 15

Comme la rotation vectorielle associée à ρ est nécessairement l, si un point M de E_3 a pour coordonnées (x, y, z) le point $\rho(M)$ a pour coordonnées (x', y', z) telles que

$$\begin{pmatrix} x' - \lambda \\ y' - \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \lambda \\ y - \mu \end{pmatrix}$$

et le point $t_{\vec{u}} \circ \rho(M)$ a pour coordonnées (x', y', z') où $z' = z + \nu$.

On obtient finalement

$$(2) \quad \begin{cases} x' = ax - by + (1 - a)\lambda + b\mu \\ y' = bx + ay - b\lambda + (1 - a)\mu \\ z' = z + \nu. \end{cases}$$

Nous laissons le lecteur vérifier que (x', y', z') sont aussi les coordonnées de $\rho \circ t_{\vec{u}}(M)$, ce qui prouve que ρ et $t_{\vec{u}}$ commutent.

(iv) *Conclusion.*

Il résulte de (1) et de (2) que les décompositions éventuelles de f répondant à la question correspondent aux solutions du système

$$\begin{cases} (1 - a)\lambda + b\mu = \alpha \\ -b\lambda + (1 - a)\mu = \beta \\ \nu = \gamma. \end{cases}$$

Comme $a \neq 1$ et $b \neq 0$, on a $(1 - a)^2 + b^2 \neq 0$, ce système a donc une solution et une seule ce qui prouve à la fois l'existence et l'unicité de la décomposition cherchée.

- On peut conclure, pour résumer :

Théorème.

Si f est une isométrie positive de E_3 n'ayant aucun point invariant, f est soit une translation soit la composée de manière unique d'une rotation et d'une translation, le vecteur de la translation appartenant à la direction de l'axe de la rotation.

3. *Conclusions.*

Nous avons montré qu'une isométrie positive de E_3 est

soit l'identité,

soit une rotation,

soit une translation,

soit la composée d'une rotation et d'une translation de vecteur appartenant à la direction de l'axe de la rotation.

Définition.

On appelle **vissage** soit une translation, soit la composée d'une rotation et d'une translation de vecteur appartenant à la direction de l'axe de la rotation. Dans ce dernier cas l'axe de la rotation est appelé axe du vissage.

En particulier, l'identité et les rotations de E_3 sont des vissages (cas où la translation est de vecteur nul). Il en résulte que l'on peut énoncer :

Théorème.

Toute isométrie positive de E_3 est un vissage.

EXERCICE

4. Étant donnée une droite Δ de E_3 montrer que l'ensemble ayant pour éléments les vissages d'axe Δ, les translations de vecteur appartenant à la direction de Δ, et l'identité est un sous-groupe abélien de $Is^+(E_3)$.

b) Isométries négatives de E_3.

Il y a également trois cas possibles (cf. § 6.10) :

- dim F = 2 et f est la symétrie orthogonale par rapport à F.
- dim F = 0 et f est la composée de 3 symétries orthogonales planes.
- F = ∅ et f est la composée de 3 symétries orthogonales planes.

1. dim F = 0.

Alors F = {M} et f a M pour seul point invariant. On en déduit immédiatement que f_M est une transformation orthogonale de (E_3, M) n'ayant que M comme élément invariant.

En conséquence f_M est la composée de 3 symétries orthogonales par rapport à des plans vectoriels de (E_3, M), ce qui conduit à :

Théorème.

Si une isométrie f de E_3 a un seul point invariant M, f est la composée de 3 symétries orthogonales par rapport à des plans contenant M.

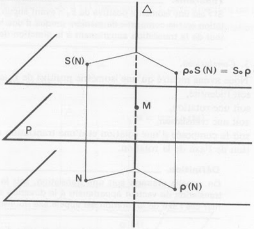
Nous allons donner une forme réduite canonique de f.

D'après le § 4.12 c, théorème 2 on sait que si f_M est distincte de $-\mathrm{Id}_{(E_3, M)}$, f_M est de manière unique la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel P et d'une rotation vectorielle d'axe orthogonal à P, ces deux applications étant permutables.

Si $f_M = -\mathrm{Id}_{(E_3, M)}$, f est la symétrie de centre M.

On obtient finalement (voir fig. 16) :

fig. 16



($f = \rho \circ s = s \circ \rho$, s symétrie orthogonale par rapport à P, ρ rotation d'axe Δ)

Théorème.

Si une isométrie f de E_3 a un seul point invariant M, f est ou bien la symétrie de centre M, ou bien la composée de manière unique d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan contenant M et d'une rotation ayant pour axe la normale en M à ce plan, ces deux applications étant permutables.

2. F = ∅.

Dans ce cas f est la composée de 3 symétries orthogonales planes :

$$f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$$

où s_i est la symétrie orthogonale par rapport à un plan P_i de E_3.

Notons π_i la direction de P_i ($i = 1, 2, 3$), et σ_i l'application linéaire associée à s_i : σ_i est la symétrie orthogonale par rapport à π_i.

On a alors $\qquad l = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1.$

Les plans P_1, P_2, P_3 ne peuvent avoir aucun point commun, sinon ce point serait un point invariant de f.

Lemme.

Étant donnés trois plans P_1, P_2, P_3 de E_3, une condition nécessaire pour que $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \varnothing$ est qu'il existe une droite de E_3 parallèle aux trois plans.

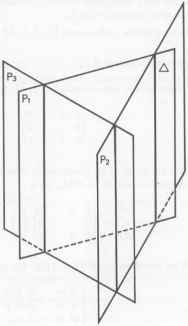
En effet :

- Si P_1 et P_2 sont parallèles, ou bien P_3 leur est parallèle et le lemme est vérifié, ou bien P_3 rencontre P_1 et P_2 selon deux droites parallèles et le lemme est également vérifié.
- Si P_1 et P_2 sont sécants, notons Δ la droite $P_1 \cap P_2$. On a alors

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \varnothing \iff \Delta \cap P_3 = \varnothing$$
$$\iff \Delta \text{ est parallèle à } P_3 \text{ et non contenue dans } P_3,$$

par suite la droite Δ est bien parallèle aux trois plans (fig. 17).

fig. 17



Il en résulte que, comme $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \varnothing$, il existe une droite vectorielle contenue dans les directions π_1, π_2, π_3.
Par suite $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_3$ de dimension supérieure ou égale à 1. Comme $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ est contenu dans le sous-espace des vecteurs invariants de $l = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$, et que l est une transformation orthogonale négative de $\mathcal{E}_3$, la dimension de ce sous-espace est nécessairement 2.
Donc l est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel π de $\mathcal{E}_3$.
Ceci va nous permettre de donner une forme réduite canonique de f.

Théorème.

Si f est une isométrie négative de E_3 n'ayant aucun point invariant, f est d'une manière unique la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan P de E_3 et d'une translation de vecteur non nul appartenant à la direction de P. De plus ces deux applications commutent.

Pour démontrer ce résultat nous utiliserons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ adapté au problème, et nous donnerons la représentation matricielle (1) de f dans ce repère. Ensuite nous supposerons qu'il existe une décomposition de f répondant à la question et nous en déduirons une seconde représentation matricielle (2) de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
De la comparaison de (1) et de (2) résultera alors l'existence et l'unicité de la solution.

(i) *Choix d'un repère.*

Nous avons montré que l'application linéaire l associée à f est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel π de $\mathcal{E}_3$.
Considérons alors un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ appartiennent à π.

(ii) *Représentation matricielle de f.*

La matrice de l dans la base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de $\mathcal{E}_3$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors en désignant par (x, y, z) les coordonnées d'un point M de E_3 et par (x', y', z') les coordonnées de son image $M' = f(M)$, on a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

où (α, β, γ) sont les coordonnées de $O' = f(O)$. On obtient :

$$(1) \quad \begin{cases} x' = & x + \alpha \\ y' = & y + \beta \\ z' = & -z + \gamma \end{cases}$$

(iii) Supposons maintenant qu'il existe une décomposition $t_{\vec{u}} \circ s$ de f répondant à la question.
Soit P le plan base de la symétrie orthogonale s. L'application linéaire l associée à $t_{\vec{u}} \circ s$ est aussi l'application linéaire associée à s; comme cette dernière est la symétrie orthogonale par rapport à la direction de P, il en résulte que la direction de P est π.
Alors dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ P a une équation du type $z = \nu$, et $\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda, \mu, 0)$ (fig. 18).

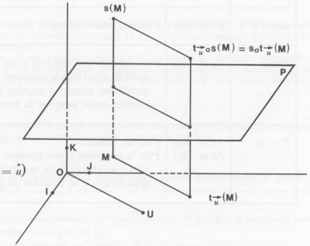


fig.18

$(\overrightarrow{OU} = \vec{u})$

Si M a pour coordonnées (x, y, z) le point $s(M)$ a pour coordonnées (x, y, z') avec $z' + z = 2\nu$, et le point $t_{\vec{u}} \circ s(M)$ a pour coordonnées (x', y', z') avec

$$x' = x + \lambda, \quad y' = y + \mu.$$

On obtient finalement :

$$(2) \quad \begin{cases} x' = & x + \lambda \\ y' = & y + \mu \\ z' = & -z + 2\nu. \end{cases}$$

Nous laissons le lecteur vérifier que $s \circ t_{\vec{u}}(M)$ a aussi pour coordonnées (x', y', z'), autrement dit que $s \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s$.

(iv) *Conclusion.*

Il résulte de (1) et de (2) qu'il existe une et une seule solution :

s est la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $z = \frac{\gamma}{2}$, et $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta, 0)$.

c) Tableau récapitulatif.

ISOMÉTRIES DE E_3		
dim F = 3	$f \in \text{Is}^+(E_3)$	f est l'identité
dim F = 2	$f \in \text{Is}^-(E_3)$	f est la symétrie orthogonale par rapport au plan F.
dim F = 1	$f \in \text{Is}^+(E_3)$	f est une rotation d'axe F
dim F = 0	$f \in \text{Is}^-(E_3)$	f est ou bien une symétrie ayant pour centre l'unique point de F, ou bien la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan contenant F et d'une rotation ayant pour axe la normale en F à ce plan.
F = ∅	$f \in \text{Is}^+(E_3)$ $f \in \text{Is}^-(E_3)$	f est un vissage. f est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan et d'une translation de vecteur non nul appartenant à la direction de ce plan.

IV. Groupe d'isométries d'une partie de E_n

6. 14 GROUPE D'ISOMÉTRIES D'UNE PARTIE P DE E_n

Nous avons vu au § 6.5 que toute isométrie de E_n est une bijection de E_n sur lui-même. Il en résulte que le groupe Is (E_n) et tout sous-groupe de celui-ci sont des groupes de transformations de E_n.

Théorème et définition.
Étant donnée une partie P de E_n l'ensemble G ayant pour éléments les isométries g de E_n telles que $g(\text{P}) = \text{P}$, est un groupe de transformations de E_n. C'est le plus grand sous-groupe de Is(E_n) (au sens de l'inclusion) qui admette P comme partie invariante. On dit que G est **le groupe des isométries** de P.

• G est un sous-groupe de Is (E_n).
Soient f et g deux éléments de G. Comme

$$g \circ f(\text{P}) = g[f(\text{P})] = g(\text{P}) = \text{P},$$

$g \circ f$ est un élément de G.

D'autre part, la restriction de g à P est une bijection de P sur lui-même, et la bijection réciproque est évidemment la restriction de g^{-1} à P; on a donc, en particulier, $g^{-1}(\text{P}) = \text{P}$, autrement dit $g^{-1} \in \text{G}$.

• Si un sous-groupe G' de Is (E_n) admet P comme partie invariante, on a

$$\forall g' \in \text{G}' \quad g'(\text{P}) = \text{P} \quad \text{(cf. § 3.7)},$$

par suite $g' \in \text{G}$ et $\text{G}' \subset \text{G}$.
Donc G est bien, pour l'inclusion, le plus grand sous-groupe de Is (E_n) admettant P comme partie invariante.

REMARQUE

Étant donnée une partie H d'un groupe G, il existe un plus petit sous-groupe de G, au sens de l'inclusion, contenant H : ce sous-groupe est, par définition, le groupe engendré par H.
Lorsque G est le sous-groupe engendré par H, on dit que H est une **partie génératrice** de G. En particulier on appellera partie génératrice minimale de G, toute partie génératrice H de G telle que : $\forall \text{H}' \subset \text{H}, \quad \text{H}' \neq \text{H} \Longrightarrow \text{H}'$ n'est pas une partie génératrice de G.

EXERCICE

Montrer que tout groupe fini admet au moins une partie génératrice minimale. Montrer, par des exemples, qu'il peut en admettre plusieurs.

6. 15 EXEMPLES DE GROUPES D'ISOMÉTRIES ASSOCIÉS A UNE PARTIE P DE E_n

Dans ce paragraphe nous donnons quelques exemples de groupes d'isométries associés à des parties usuelles P de E_2 ou de E_3.
D'autres cas seront proposés, en exercice, à la fin de ce chapitre.

a) $n = 2$.

1. P = {A}.
L'étude faite au § 6.12 permet de conclure que le groupe G des isométries de A se compose :
• de l'application Id_{E_2},
• des rotations de centre A,
• des symétries orthogonales par rapport aux droites contenant A.

EXERCICE

1. Montrer que les symétries orthogonales par rapport aux droites contenant A constituent une partie génératrice de G. Montrer qu'elle n'est pas minimale.

2. P = {A, B}.
Si g est une isométrie de E_2 admettant la partie P comme partie invariante, la restriction de g à {A, B} est une permutation de {A, B}, donc il y a a priori deux cas à envisager :
(i) $g(\text{A}) = \text{A}$ et $g(\text{B}) = \text{B}$
(ii) $g(\text{A}) = \text{B}$ et $g(\text{B}) = \text{A}$.
Dans le cas (i) il résulte de l'étude 1. précédente que g est soit l'application identique Id_{E_2}, soit la symétrie orthogonale s par rapport à la droite (AB).

Dans le cas (ii) g est une application affine qui échange A et B; donc qui conserve le milieu C de A et de B; par suite g est soit une rotation de centre C, soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite contenant C.

Si g est une rotation de centre C l'angle de g est égal à angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \varpi$, donc g est la symétrie σ de centre C.

Si g est une symétrie orthogonale par rapport à une droite contenant C, celle-ci doit être orthogonale à (AB), donc doit être la médiatrice de A et de B; notons s' cette symétrie orthogonale.

En conclusion, le groupe G des isométries de {A, B} a quatre éléments :

- l'application identique Id_{E_2},
- la symétrie orthogonale s par rapport à la droite (AB),
- la symétrie σ ayant pour centre le milieu de A et de B,
- la symétrie orthogonale s' par rapport à la médiatrice des points A, B.

EXERCICE

2. Écrire la table de multiplication de ce groupe. Quels sont ses sous-groupes propres? Quelles sont ses parties génératrices minimales?

3. P *est un triangle équilatéral.*

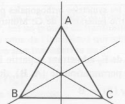
On a, dans ce cas, P = {A, B, C} et d (A, B) = d (B, C) = d (C, A) (fig. 19).

Si g est une isométrie de E_2 admettant la partie P comme partie invariante, la restriction de g à {A, B, C} est une permutation de cet ensemble; il y a donc a priori six cas possibles :

- g (A) = A g (B) = B g (C) = C (1)
- g (A) = A g (B) = C g (C) = B (2)
- g (A) = C g (B) = B g (C) = A (3)
- g (A) = B g (B) = A g (C) = C (4)
- g (A) = B g (B) = C g (C) = A (5)
- g (A) = C g (B) = A g (C) = B (6)

Comme d'autre part (A, B, C) est un repère affine de E_2, une application affine de E_2 dans lui-même est parfaitement déterminée par la donnée des images de A, B et C; par conséquent, une isométrie étant une application affine, il y a dans chacun des six cas possibles au plus une isométrie répondant à la question.

fig. 19



Nous allons établir qu'il y en a toujours une (et par suite une seule).

- Cas (1) : g est l'identité Id_{E_2}.
- Cas (2) : le fait que A soit équidistant de B et de C montre que A appartient à la médiatrice de B et de C et par conséquent que la symétrie orthogonale s_A par rapport à cette médiatrice convient. Donc $g = s_A$.
- Cas (3) : on a de même $g = s_B$, symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de A et de C.
- Cas (4) : $g = s_C$, symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de A et de B.
- Cas (5) et (6) :

notons O le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 1, 1, 1, autrement dit O est le centre de gravité du triangle ABC.

Si une isométrie g vérifie les relations (5) ou (6) elle admet le point O comme point invariant (puisqu'elle est affine elle « conserve le barycentre ») donc g est soit une rotation de centre O, soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite contenant O.

Or g ne peut être une symétrie orthogonale par rapport à une droite contenant O car g serait alors involutive, ce qui est en contradiction avec les relations (5) ou (6).

Lemme.

On a les égalités :

$$\text{angle}\,(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \text{angle}\,(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \text{angle}\,(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}).$$

En effet, comme O est invariant par toute isométrie laissant P globalement invariant, O est invariant par s_A, s_B, s_C.

Or $\quad \text{angle}\,(s_B(A) - s_B(O), s_B(B) - s_B(O)) = -\,\text{angle}\,(A - O, B - O)$

d'où l'on déduit

$$\text{angle}\,(C - O, B - O) = -\,\text{angle}\,(A - O, B - O)$$

c'est-à-dire

$$\text{angle}\,(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = -\,\text{angle}\,(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

ou encore

$$\text{angle}\,(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \text{angle}\,(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

L'égalité angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ = angle $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$ s'obtient de même en écrivant

$$\text{angle}\,(s_C(B) - s_C(O), s_C(C) - s_C(O)) = -\,\text{angle}\,(B - O, C - O).$$

On peut alors conclure que dans le cas (5) la rotation ρ de centre O et d'angle angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ convient, et que dans le cas (6) la rotation ρ^{-1} de centre O et d'angle angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ convient.

En résumé :

Le groupe G des isométries d'un triangle équilatéral {A, B, C} a six éléments qui sont : l'application identique Id_{E_2}, les symétries orthogonales s_A, s_B, s_C par rapport aux médiatrices des points B et C, C et A, A et B, et les rotations ρ et ρ^{-1} ayant pour centre le centre de gravité O du triangle et d'angles respectifs

$$\text{angle}\,(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad \text{et} \quad -\,\text{angle}\,(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

EXERCICE

3. Écrire la table de multiplication de ce groupe. Montrer qu'il a quatre sous-groupes propres non réduits à $\{Id_{E_3}\}$.
Déterminer quelles sont ses parties génératrices minimales.

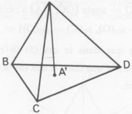
b) $n = 3$.

1. $P = \{A, B\}$.
Si g est une isométrie admettant la partie P comme partie invariante, on a
soit $g(A) = A$ et $g(B) = B$ (1)
soit $g(A) = B$ et $g(B) = A$ (2).
Il résulte de l'étude faite au § 6.12 que

- dans le cas (1), g est
soit l'identité Id_{E_3},
soit une rotation d'axe (AB),
soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan contenant la droite (AB),
- dans le cas (2), g est
soit la symétrie ayant pour centre le milieu O de A et B,
soit la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur π de A et B,
soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite contenant O et contenue dans π.

2. P est un tétraèdre régulier.
Dans ce cas, P est un ensemble constitué de 4 points non coplanaires A, B, C, D équidistants deux à deux (fig. 20).
Si g est une isométrie de E_3 admettant la partie P comme partie invariante, la restriction de g à {A, B, C, D} est une permutation de cet ensemble.
Comme (A, B, C, D) est un repère affine de E_3, une application affine de E_3 dans lui-même est parfaitement déterminée par la donnée des images de A, B, C et D; par conséquent, une isométrie étant une application affine, le nombre des isométries laissant P globalement invariant est au plus égal au nombre des permutations de {A, B, C, D} c'est-à-dire à 24.

fig. 20



(i) *Isométries laissant invariants exactement deux éléments de* P.
Soit g une telle isométrie, s'il en existe. Supposons qu'elle admette A et B comme points invariants et qu'elle échange C et D.

Alors le milieu de C et D est invariant par g; g est nécessairement la symétrie orthogonale par rapport au plan contenant A, B et le milieu de D et C, autrement dit par rapport au plan médiateur de D et C. Notons σ_{DC} cette symétrie.

En conclusion les isométries laissant invariants exactement deux éléments de P sont : σ_{AB}, σ_{AC}, σ_{AD}, σ_{BC}, σ_{BD}, σ_{CD}.

(ii) *Isométries laissant invariant un seul élément de* P.
Par exemple A.
Soit g une telle isométrie s'il en existe; g admet {A} et {B, C, D} comme parties invariantes.

Lemme.
Le centre de gravité A′ du triangle équilatéral BCD est la projection orthogonale de A sur le plan(BCD).

En effet les points A et A′ étant tous deux équidistants de B, C, D appartiennent aux plans médiateurs des points B, C et B, D; par suite la droite (AA′) est orthogonale aux droites (BC) et (BD) donc au plan (B ⊂ D), ce qui prouve que A′ est la projection orthogonale de A sur ce plan.

La droite (AA′) est transformée par g en une droite passant par A et orthogonale au plan (B ⊂ D), donc est transformée en elle-même. Par suite $g(A') = A'$ et g est nécessairement une rotation d'axe (AA′); plus précisément g est soit la rotation ρ_A d'axe (AA′) et d'angle angle $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C})$, soit la rotation ρ_A^{-1} d'axe (AA′) et d'angle angle $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D})$.
Nous obtenons de même les rotations ρ_B, ρ_B^{-1}, ρ_C, ρ_C^{-1}, ρ_D, ρ_D^{-1}.

(iii) *Isométries échangeant deux à deux les points de* P.
Supposons que g est une isométrie échangeant d'une part A et B, et d'autre part C et D.
Alors les milieux de A, B et de C, D sont invariants, et il résulte de l'étude 1. que g est la symétrie orthogonale par rapport à la droite contenant les milieux de A et B et de C et D. Notons-là s_1.
On obtient de même s_2 (qui échange A et C, et B et D) et s_3 (qui échange A et D, et B et C).

(iv) Nous avons obtenu jusqu'à présent, en comptant Id_{E_3}, 18 isométries laissant P globalement invariant.
Supposons qu'il existe une isométrie g laissant P globalement invariant et distincte de celles-ci et supposons, par exemple, que $g(A) = B$.
Alors $\sigma_{AB} \circ g(A) = A$ et A est le seul point invariant de $\sigma_{AB} \circ g$, par suite on a

$$\sigma_{AB} \circ g = \rho_A \quad \text{ou} \quad \sigma_{AB} \circ g = \rho_A^{-1}.$$

Il y a donc deux telles isométries :

$$g_{AB} = \sigma_{AB} \circ \rho \quad \text{et} \quad g'_{AB} = \sigma_{AB} \circ \rho_A^{-1}.$$

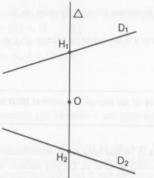
On obtient de même g_{AC}, g'_{AC}, g_{AD}, g'_{AD}, soit en tout 6 autres isométries laissant P globalement invariant.
En conclusion le groupe G du tétraèdre régulier {A, B, C, D} a 24 éléments.

3. $P = D_1 \cup D_2$, D_1 et D_2 *étant deux droites non coplanaires de* E_3.

Soit Δ la perpendiculaire commune aux droites D_1 et D_2 et H_1, H_2 les points où elle les rencontre (fig. 21).

Si une isométrie g admet P comme partie invariante, elle transforme Δ en une droite rencontrant D_1 et D_2 et qui leur est orthogonale.

fig. 21



Par suite $g(\Delta) = \Delta$ et on a

- soit $g(H_1) = H_1$, $g(H_2) = H_2$,
- soit $g(H_1) = H_2$, $g(H_2) = H_1$.

1er cas : $g(H_1) = H_1$, $g(H_2) = H_2$.

Alors tout point de la droite Δ est invariant par g. Il en résulte que g est soit l'identité, soit une rotation d'axe Δ, soit une symétrie orthogonale par rapport à un plan contenant Δ.

La seule rotation d'axe Δ qui convienne est la symétrie orthogonale s par rapport à Δ. D'autre part, D_1 et D_2 n'étant pas coplanaires, aucune symétrie orthogonale par rapport à un plan contenant Δ ne laisse la partie P invariante.

2e cas : $g(H_1) = H_2$ $g(H_2) = H_1$.

Alors, d'après 1., g est soit la symétrie ayant pour centre le milieu O de H_1 et H_2, soit la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur de H_1 et H_2, soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par O et orthogonale à Δ.

On vérifie facilement que, D_1 et D_2 n'étant pas coplanaires, aucune isométrie des deux premiers types ne laisse P invariante.

Parmi les symétries orthogonales par rapport à des droites orthogonales à Δ passant par O, seules conviennent les symétries orthogonales s', s'' par rapport aux droites Δ', Δ'', passant par O et ayant pour directions respectives celles des bissectrices du couple (D_1, D_2).

En conclusion, le groupe G de $P = D_1 \cup D_2$ a quatre éléments. On l'appelle le groupe de KLEIN.

EXERCICE

4. Écrire la table de multiplication de ce groupe. Trouver ses parties génératrices minimales.

EXERCICES

6.1 Dans E_3 muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ déterminer l'image par la symétrie orthogonale s par rapport à la droite Δ définie par

$$\begin{cases} x = z + 2 \\ y = -z + 1 \end{cases},$$

du plan P d'équation

$$x - y + 2z - 1 = 0.$$

6.2 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de E_2.

On considère l'application f de E_2 dans lui-même qui à M (x, y) associe M' (x', y') défini par

$$x' = \frac{x + \sqrt{3}\,y + \sqrt{2}}{2}$$

$$y' = \frac{\sqrt{3}\,x - y + \sqrt{2}}{2}.$$

Montrer que f est une isométrie négative de E_2.

Déterminer la droite Δ et le vecteur $\vec{u}$ appartenant à la direction de Δ tels que, si s désigne la symétrie orthogonale par rapport à Δ, on ait $f = t_{\vec{u}} \circ s$.

6.3 Dans l'espace affine euclidien E_3 muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère l'application f de E_3 dans lui-même qui au point M (x, y, z) associe le point M' (x', y', z') défini par

$$x' = \frac{x - 2y + 2z}{3} + 1$$

$$y' = \frac{y - 2z - 2x}{3} +$$

$$z' = \frac{z - 2x - 2y}{3}.$$

Montrer que f est une isométrie négative sans point invariant.

Déterminer le plan P et le vecteur $\vec{u}$ appartenant à la direction de P tels que, si s est la symétrie orthogonale par rapport à P on ait $f = t_{\vec{u}} \circ s$.

6.4 Dans l'espace affine euclidien E_3 muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère la droite D définie par les équations

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases},$$

et le plan P d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$.

Si M est un point de E_3 on note m (resp. μ) sa projection orthogonale sur D (resp. P). Calculer $d(m, \mu)$.

6.5 Dans E_3 muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ déterminer la perpendiculaire commune aux droites

$$D \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$D' \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y - 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

6.6 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E_3.
P étant le plan d'équation $x + y + z = 3$, on considère l'application f de E_3 dans lui-même définie de la manière suivante :
si M_1 est la projection orthogonale de M sur P, $M' = f(M)$ est le barycentre des points O, M, M_1 affectés respectivement des coefficients 2, 1, 1.

1° Déterminer les coordonnées (x_1, y_1, z_1) de M_1 en fonction des coordonnées (x, y, z) de M, puis les coordonnées (x', y', z') de M' en fonction de (x, y, z).
En déduire que f est une application affine.

2° Quels sont les points invariants de f?

6.7 Dans E_2 muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la famille de droites $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$, où D_λ est la droite d'équation $\lambda^2 x - \lambda y + 1 = 0$.

1° Soit M le point de coordonnées (x, y).
Existe-t-il des droites de la famille contenant M.

2° Donner une équation de la droite Δ_λ orthogonale à D_λ et contenant le point $\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$.

3° Montrer que les droites Δ_λ ont un et un seul point commun A que l'on déterminera.
Établir que toute droite contenant A et non orthogonale à D $(O, \vec{i})$ appartient à la famille Δ_λ.

6.8 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de E_2.
A quelle condition l'équation $ax^2 + 2\,bxy + cy^2 = 0$ représente-t-elle deux droites?
Ces droites peuvent-elles être orthogonales?

6.9 On considère dans le plan affine euclidien E_2 muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite D d'équation $x + y - 2 = 0$ et la droite D' d'équation $2\,x - y + 1 = 0$.
Quelles sont les équations des bissectrices du couple (D, D').

6.10 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace affine euclidien orienté E_3.
Soit f la rotation d'axe Δ contenant le point Ω (0, 0, 1), orienté par le vecteur unitaire $\vec{w}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ ($\frac{\pi}{3}$ est une détermination de la mesure de l'angle de f dans le plan vectoriel orthogonal à $\vec{u}$ orienté de manière compatible).

1° Déterminer deux vecteurs unitaires $\vec{u}$, $\vec{v}$ tels que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue un repère orthonormé direct.

2° Exprimer dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ les coordonnées (X', Y', Z') de f (M) en fonction des coordonnées (X, Y, Z) de M.

3° Exprimer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les coordonnées (x', y', z') de f (M) en fonction des coordonnées (x, y, z) de M.

6.11 Dans le plan affine euclidien E_2 muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ensemble C des points M (x, y) tels que $f(x, y) = 0$ où f est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1° Montrer que C est globalement invariant par la symétrie orthogonale par rapport à D $(O, \vec{i})$ si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, -y) = f(x, y).$$

2° Montrer que C est globalement invariant par la symétrie orthogonale par rapport à D $(O, \vec{j})$ si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(-x, y) = f(x, y).$$

3° Montrer que C est globalement invariant par la symétrie de centre O si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(-x, -y) = f(x, y).$$

6.12 Soient a, b, c trois réels positifs. Montrer qu'il existe un triangle ABC de E_2 tel que

$$\|\overrightarrow{BC}\| = a \ , \ \|\overrightarrow{CA}\| = b \ , \ \|\overrightarrow{AB}\| = c \ ,$$

si et seulement si

$$|b - c| < a < b + c.$$

6.13 Soient A et B deux points distincts de E_2, et α, β deux réels positifs.
Montrer que l'ensemble des points M de E_2 tels que d(M, A) $= \alpha$ et d(M, B) $= \beta$ est

- vide si $\alpha + \beta < d$ (A, B)
- constitué d'un seul point si $\alpha + \beta = d$(A, B), point qui appartient au segment [A, B]
- constitué de deux points admettant pour médiatrice la droite (AB) si $\alpha + \beta > d$(A, B).

(Indication : on pourra utiliser un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est le milieu de A et B et où $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OB}\|}$).

6.14 Soient A, B, C trois points de E_2. Établir que pour tout point M de E_2 on a

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

6.15 A, B, C, D étant quatre points donnés de E_3, déterminer l'ensembl3 des points M tels que

$$\|\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}\| = \|2\,\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|.$$

6.16 Soient A, B, C, D quatre points de E_3.
1° Déterminer l'ensemble des points M tels que

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MD} = 3\,k$$

où k est un réel donné.
2° Déterminer l'ensemble des points M tels que

$$\|\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} + 4\,\overrightarrow{MC}\| = 3\,\|\overrightarrow{MD}\|.$$

6.17 Soient $A_1, \ldots, A_p$ des points de E_2.
On se propose de déterminer les droites Δ de E_2, ayant une direction donnée δ, telles que $\sum_{i=1}^{p} d\,(A_i, \Delta)^2$ soit minimum.

1° Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire orthogonal à δ.
Montrer que si O est un point de Δ on a

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, p\} \qquad d\,(A_i, \Delta)^2 = (\overrightarrow{OA_i}.\vec{n})^2.$$

2° Soit G le barycentre des points $A_1, \ldots, A_p$ affectés de coefficients égaux non nuls.
Montrer que

$$\sum_{i=1}^{p} (\overrightarrow{OA_i}.\vec{n})^2 = p\,(\overrightarrow{OG}.\vec{n})^2 + \Sigma\,(\overrightarrow{GA_i}.\vec{n})^2.$$

En déduire que $\sum_{i=1}^{p} d\,(A_i, \Delta)^2$ est minimum lorsque Δ contient G.

6.18 Soient A, B, C trois points de E_2 orienté.
Montrer que pour tout point M de E_2, on a

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

6.19 Dans l'espace affine euclidien orienté E_3 on considère un parallélogramme MNPQ

$$(\text{i.e. } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \quad , \quad \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}).$$

Montrer que, si l'on pose $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$, $\overrightarrow{MQ} = \vec{v}$, l'aire du parallélogramme MNPQ est égale à $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.
Application numérique : dans un repère orthonormé direct M, N, Q ont pour coordonnées

$$(1, 2, 1) \quad , \quad (1, 0, -1) \quad , \quad (0, 1, 2).$$

6.20 Dans l'espace affine euclidien orienté E_3 on considère un parallélipipède MNPQM'N'P'Q' où

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{Q'P'} \quad , \quad \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{M'Q'} = \overrightarrow{N'P'} \quad ,$$

et
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'}.$$

Montrer que si l'on pose $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$, $\vec{v} = \overrightarrow{MQ}$, $\vec{w} = \overrightarrow{MM'}$, le volume de ce parallélipipède est égal à $|\det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ où B est une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_3$.
Application numérique :
dans B , M (1, 2, 0) , N (0, 1, 0) , Q (− 1, 0, 1) , M' (0, 2, 1).

6.21 Étant donnés trois points non alignés A, B, C de l'espace affine euclidien orienté E_3 et B une base orthonormée directe de $\mathcal{E}_3$, déterminer l'ensemble des points M de E_3 tels que

$$\det_B(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \alpha$$

où α est un réel donné.

6.22 Soient A et B deux points distincts de l'espace affine euclidien orienté E_3.
A quelle condition existe-t-il des points M de E_3 tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathcal{E}_3$ donné?
Lorsque cette condition est réalisée quel est l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{u}$?

6.23 Soient A, B, C trois points non alignés de E_2 tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$, et λ un réel.
1° Déterminer un réel μ pour que le barycentre de A, B, C affectés respectivement de λ, $\frac{\lambda^2 + 2}{3}$, μ, appartienne à la médiatrice de B et C.
2° Pour quelles valeurs de λ, ce barycentre est-il l'image de A par la symétrie orthogonale par rapport à (BC)?

6.24 Dans le plan affine euclidien E_2 on considère la rotation r de centre A et d'angle φ, $\varphi \in \mathcal{A}$, et la translation $t_{\vec{v}}$ où $\vec{v} \in \mathcal{E}_2$.
Déterminer l'isométrie $t_{-\vec{v}} \circ r \circ t_{\vec{v}}$.

6.25 Soient D_1 et D_2 deux droites de E_2 et s une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ. Montrer que si les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles, le point M d'intersection de D_1 et D_2 appartient à Δ.

6.26 Soient D et D' deux droites distinctes d'un plan P de E_3.
1° On considère une rotation f d'axe Δ telle que $f(D) = D'$.
Quelle est la projection orthogonale de Δ sur P?
2° Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite Δ soit l'axe d'une rotation transformant D en D'.

6.27 Soient A, B, C trois points non alignés de E_2 et δ une droite de E_2.
On note
δ_a l'image de δ par la symétrie orthogonale par rapport à (BC)
δ_b l'image de δ par la symétrie orthogonale par rapport à (CA)
δ_c l'image de δ par la symétrie orthogonale par rapport à (AB).
Montrer que les angles de droites angle (δ_a, δ_b), angle (δ_b, δ_c), angle (δ_c, δ_a) ne dépendent pas de la droite δ.

6.28 Soient P_1 et P_2 deux plans de E_3 et s une symétrie orthogonale par rapport à un plan Π de E_3 telle que $s(P_1) = P_2$.
Montrer que $P_1 \cap P_2 \subset \Pi$.

6.29 **Détermination d'une isométrie de E_2.**
Soient A, B, A', B' quatre points de E_2 tels que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| \neq 0.$$

Montrer qu'il existe exactement deux isométries f de E_2 telles que

$$f(A) = A' \quad , \quad f(B) = B' \quad ,$$

que l'une est positive et que l'autre est négative.

6.30 Soient A et B deux points de E_3. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite Δ soit l'axe d'une rotation transformant A en B est que Δ soit contenue dans le plan médiateur de A et B.

6.31 Soient D et D' deux droites du plan vectoriel euclidien E_2.
1° Si f est une rotation de centre O telle que $f(D) = D'$, montrer que O est équidistant de D et de D'.
Étudier la réciproque.
2° Quel est l'ensemble des centres des rotations transformant D en D'?

6.32 Soient D et D' deux droites de E_3 coplanaires, f une rotation d'axe D, f' une rotation d'axe D'.
1° Montrer que $f' \circ f$ soit une rotation, soit une translation.
2° Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f' \circ f$ soit une translation.
3° Lorsque $f' \circ f$ est une rotation, déterminer son axe.

6.33 Si f est une isométrie de E_n $(n = 2, 3)$ on note φ_f l'application de $\text{Is}(E_n)$ dans lui-même qui à toute isométrie g associe $f^{-1} \circ g \circ f$.
1° Montrer que φ_f est un homomorphisme bijectif de groupes.
2° Montrer que l'image de $\text{Is}^+(E_n)$ (resp. $\text{Is}^-(E_n)$) par φ_f est $\text{Is}^+(E_n)$ (resp. $\text{Is}^-(E_n)$).
3° Soit M un point de E_n et σ la symétrie par rapport à M. Montrer que $\varphi_f(\sigma)$ est une symétrie par rapport à un point M' que l'on déterminera.

4° Montrer que dans $\mathrm{Is}(E_n)$ la relation

$$g \sim h \iff g \circ h^{-1} \in \mathrm{Is}^+(E_n)$$

est une relation d'équivalence.
Quelles sont ses classes?

6.34 Soient D et D' deux droites de E_2. Quel est l'ensemble des points M de E_2 tels que

$$d(M, D') = \lambda\, d(M, D)$$

où λ est un réel positif donné?

6.35 On considère deux triangles ABC et A'B'C' du plan affine euclidien E_2, A, B, C (resp. A', B', C') étant trois points non alignés.

1° Montrer que s'il existe une isométrie f de E_2 telle que

$$f(A) = A' \quad , \quad f(B) = B' \quad , \quad f(C) = C'$$

f est la seule isométrie transformant A en A', B en B', C en C'.

2° Montrer qu'une telle isométrie f existe si et seulement si on a

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| \quad , \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{B'C'}\| \quad , \quad \|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{C'A'}\|.$$

3° Établir que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une isométrie positive f de E_2 telle que

$$f(A) = A' \quad , \quad f(B) = B' \quad , \quad f(C) = C'.$$

(ii) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| \quad , \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{A'C'}\|$

et $\quad \text{angle}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{angle}(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}).$

(iii) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| \quad , \quad \text{angle}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{angle}(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$

et $\quad \text{angle}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \text{angle}(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}).$

4° Établir que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une isométrie négative f de E_2 telle que

$$f(A) = A' \quad , \quad f(B) = B' \quad , \quad f(C) = C'.$$

(ii) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| \quad , \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{A'C'}\|$

et $\quad \text{angle}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \text{angle}(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \omega.$

(iii) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| \quad , \quad \text{angle}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \text{angle}(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \omega$

et $\quad \text{angle}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \text{angle}(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}) = \omega.$

6.36 Soit ABC un triangle du plan affine euclidien E_2.
Montrer que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ si et seulement si

$$\text{angle}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \text{angle}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}).$$

(On pourra utiliser la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de B et C.)

6.37 Soient A, B, C trois points non alignés de E_2, B' (resp. C') le milieu de A et C (resp. A et B).
On suppose que $\|\overrightarrow{BB'}\| = \|\overrightarrow{CC'}\|$; en déduire que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$.

6.38 Soient A, B, C trois points non alignés de E_2 tels que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$.
Soit M ∈ [B, C]; montrer que

$$d(M, (AB)) + d(M, (AC))$$

ne dépend pas du point M de [B, C] choisi.

6.39 Soit ABC un triangle du plan affine euclidien E_2.
Montrer que ABC est un triangle équilatéral (i.e. $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\|$) si et seulement si on a

$$\text{angle}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{angle}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \text{angle}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}).$$

Lorsque cette condition est réalisée montrer que $\frac{\pi}{3}$ est une détermination de la mesure de ces angles.

6.40 Que peut-on dire d'un triangle ABC de E_2 tel qu'il existe un point O de E_2 vérifiant

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OC}\|$$

et $\quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$

6.41 Étant donnés trois points non alignés A, B, C de E_2, montrer que les médiatrices de A et B, de B et C, et de C et A, ont un et un seul point commun qui est l'unique point de E_2 équidistant de A, B et C.

6.42 Hauteurs d'un triangle.

Soit ABC un triangle de E_2, A, B, C étant trois points non alignés.
On note
A' la projection orthogonale de A sur (BC)
B' la projection orthogonale de B sur (CA)
C' la projection orthogonale de C sur (AB).

1° Montrer que les droites (AA') et (BB') ont un point commun H.
Établir que la droite (CH) est orthogonale à (AB) (on pourra calculer $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$).
En déduire que H est le point commun aux trois hauteurs (AA'), (BB'), (CC') du triangle.
H est appelé l'orthocentre du triangle ABC.

2° Retrouver que les hauteurs sont concourantes en calculant les coefficients λ, μ, ν tels que $\overrightarrow{A'B} = \lambda\, \overrightarrow{A'C} \quad , \quad \overrightarrow{B'C} = \mu\, \overrightarrow{B'A} \quad , \quad \overrightarrow{C'A} = \nu\, \overrightarrow{C'B}$, en fonction de

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} \quad ,$$

et en utilisant le théorème de Céva.

3° Soit f une isométrie de E_2. Montrer que les hauteurs du triangle $f(A)f(B)f(C)$ sont les images par f des hauteurs du triangle ABC, et que l'orthocentre de $f(A)f(B)f(C)$ est $f(H)$.

6.43 Bissectrices d'un triangle.

Soient A, B, C trois points non alignés de E_2.
On note

• D_a la bissectrice du couple de demi-droites d'origine A, ayant pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

• D_b la bissectrice du couple de demi-droites d'origine B, ayant pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$

• D_c la bissectrice du couple de demi-droites d'origine C, ayant pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$

et

s_a, s_b, s_c les symétries orthogonales par rapport à D_a, D_b, D_c.

Les droites D_a, D_b, D_c sont souvent appelées bissectrices intérieures du triangle ABC.

1° Montrer que les droites D_a et D_b ont un et un seul point commun M.

2° On note

$$\gamma = s_b(c) \quad , \quad \gamma' = s_a(\gamma).$$

Montrer que l'image par $s_a \circ s_b$ de la demi-droite d'origine C et de vecteur directeur $\overrightarrow{CB}$ est la demi-droite d'origine γ' et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$.

3° Soit Δ la médiatrice de C et γ' et s la symétrie orthogonale par rapport à Δ.

Montrer que M appartient à Δ.

Montrer que l'image par s de la demi-droite d'origine γ' et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$ est la demi-droite d'origine C de vecteur directeur $\overrightarrow{CA}$.

En déduire que $s \circ s_a \circ s_b$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (CM), et que cette symétrie transforme la demi-droite d'origine C et de vecteur directeur $\overrightarrow{CB}$ en la demi-droite d'origine C et de vecteur directeur $\overrightarrow{CA}$.

Conclure que (CM) est la bissectrice du couple de demi-droites d'origine C et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$, et donc que les droites D_a, D_b, D_c sont concourantes.

4° On note D'_a la droite contenant A orthogonale à D_a

D'_b la droite contenant B orthogonale à D_b

D'_c la droite contenant C orthogonale à D_c,

et s'_a, s'_b, s'_c les symétries orthogonales par rapport aux droites D'_a, D'_b, D'_c.

Les droites D'_a, D'_b, D'_c sont appelées les bissectrices extérieures du triangle ABC.

En utilisant un raisonnement analogue à celui des questions 1°, 2°, 3°, établir que les droites D'_a, D'_b, D_c sont concourantes.

De même les droites D'_b, D'_c, D_a sont concourantes ainsi que les droites D'_c, D'_a, D_b.

6.44 Soient A, B, C trois points non alignés de E_2.

D_a, D_b, D_c étant les bissectrices intérieures du triangle et D'_a, D'_b, D'_c les bissectrices extérieures (notations de l'exercice 6.43), on note

$$\begin{array}{ll} A' = D_a \cap (BC) & A'' = D'_a \cap (BC) \\ B' = D_b \cap (CA) & B'' = D'_b \cap (CA) \\ C' = D_c \cap (AB) & C'' = D'_c \cap (AB). \end{array}$$

On se propose de calculer les coefficients λ, μ, ν tels que

$$\overrightarrow{A'B} = \lambda\,\overrightarrow{A'C} \quad , \quad \overrightarrow{B'C} = \mu\,\overrightarrow{B'A} \quad , \quad \overrightarrow{C'A} = \nu\,\overrightarrow{C'B}.$$

1° Montrer que

$$\overrightarrow{AA''}.\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \overrightarrow{AA''}.\frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} = 0.$$

En écrivant

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} \quad ,$$

en déduire que

$$\lambda = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}.$$

2° Déduire, par permutation circulaire, les valeurs de μ et ν, et conclure en utilisant le théorème de Céva que les droites D_a, D_b, D_c sont concourantes.

3° On pose

$$\overrightarrow{A''B} = \lambda'\,\overrightarrow{A''C} \quad , \quad \overrightarrow{B''C} = \mu'\,\overrightarrow{B''A} \quad , \quad \overrightarrow{C''A} = \nu'\,\overrightarrow{C''B}.$$

Montrer que

$$\lambda' = -\lambda = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}.$$

Déduire les valeurs de μ', ν'.

Conclure que les droites D'_a, D'_b, D_a sont concourantes.

6.45 Soient A, B, C trois points non alignés de E_2.

On pose

$$a = \|\overrightarrow{BC}\| \quad , \quad b = \|\overrightarrow{CA}\| \quad , \quad c = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

1° Quel est le barycentre des points A et B affectés des coefficients a et b?

2° En déduire le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b, c.

6.46 On considère un triangle ABC du plan affine euclidien E_2 et un point O de E_2.

Les normales en O aux droites (OA), (OB), (OC) rencontrent respectivement (BC), (CA), (AB) aux points A′, B′, C′.

Montrer que les points A′, B′, C′ sont alignés.

(Indication : on pourra déterminer les coefficients λ, γ, ν tels que $\overrightarrow{A'C} = \lambda\,\overrightarrow{A'B}$, $\overrightarrow{B'A} = \mu\,\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{C'B} = \nu\,\overrightarrow{C'A}$ et utiliser le théorème de Ménelaus.)

6.47 Soient ABC un triangle de E_2 tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$, les points A, B, C étant non alignés.

Si M est un point de [BC] on note

• E le point d'intersection de (AB) et de la parallèle à (AC) contenant M

• F le point d'intersection de (AC) et de la parallèle à (AB) contenant M.

Montrer que, lorsque M décrit [BC], la médiatrice de E et F passe par un point fixe.

6.48 Soient A, B, C trois points non alignés de E_2.

On note A′ le point du demi-plan ouvert défini par la droite (BC) et ne contenant pas A tel que

$$\|\overrightarrow{A'B}\| = \|\overrightarrow{A'C}\| = \|\overrightarrow{BC}\|.$$

On définit de manière analogue les points B′ et C′.

1° Montrer que $\|\overrightarrow{AA'}\| = \|\overrightarrow{BB'}\| = \|\overrightarrow{CC'}\|$

2° Montrer que les droites (AA′), (BB′), (CC′) sont concourantes.

6.49 Dans E_2 on considère un carré ABCD (i.e. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$).

Quel est le groupe G des isométries de ce carré?

6.50 Soient A, B, C, A′, B′, C′ six points de E_3 tels que

• les points A, B, C ne sont pas alignés

• $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{B'C'}\|$, $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{C'A'}\|$.

1° Montrer que les seules isométries de E_3 laissant invariants les points A, B, C sont l'identité et la symétrie orthogonale par rapport au plan P (A, B, C).

2° Soient A, B″, C″ les images de A′, B′, C′ par la translation de vecteur $\overrightarrow{A'A}$.

Construire une isométrie f telle que

$$f(A) = A \quad , \quad f(B'') = B \quad , \quad f(C'') = C.$$

3° Déduire des questions précédentes qu'il y a exactement deux isométries de E_3 transformant respectivement A, B, C en A′, B′, C′, que l'une est positive et l'autre négative.

4° Retrouver ce résultat en se ramenant au cas A = A′ au moyen de la translation de vecteur $\overrightarrow{A'A}$ et en utilisant le résultat de l'exercice 4.10.

6.51 Retournements.

Dans E_3, étant donnée une droite Δ, on appelle retournement d'axe Δ la symétrie orthogonale par rapport à Δ.

1° Soient τ_1 et τ_2 deux retournements d'axes Δ_1 et Δ_2.

a) Montrer que si $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \varnothing$ $\tau_2 \circ \tau_1$ est une rotation. Dans ce cas quel est son axe? Exprimer son angle en fonction de l'angle des droites Δ_1 et Δ_2.

b) Montrer que si Δ_1 et Δ_2 sont parallèles et distinctes $\tau_2 \circ \tau_1$ est une translation $t_{\vec{u}}$ dont on déterminera le vecteur $\vec{u}$.

c) Montrer que si Δ_1 et Δ_2 ne sont pas coplanaires $\tau_2 \circ \tau_1$ est un vissage.

Quels sont les éléments de ce vissage : axe, angle, vecteur de la translation?

2° *a)* Montrer réciproquement que toute rotation d'axe D est la composée de deux retournements d'axes concourants rencontrant D et orthogonaux à D, l'un de ces retournements pouvant être choisi arbitrairement.

b) Montrer que toute translation $t_{\vec{u}}$ est la composée de deux retournements d'axes parallèles et orthogonaux à $\vec{u}$, l'un de ces retournements pouvant être choisi arbitrairement.

c) Déduire de *a)* et *b)* que tout vissage d'axe D est la composée de deux retournements d'axes rencontrant D et orthogonaux à D, l'un de ces retournements pouvant être choisi arbitrairement.

6.52 Plans bissecteurs.

Soient P_1 et P_2 deux plans non parallèles de E_3 et $\Delta = P_1 \cap P_2$.

1° Montrer que l'ensemble des points M de E_3 équidistants de P_1 et de P_2 est constitué de deux plans P, P′ contenant Δ.

(On pourra utiliser un repère orthonormé de E_3, et les équations de P_1 et P_2 dans ce repère.)

2° Montrer que

$$\text{angle}(P_1, P) = \text{angle}(P, P_2)$$

et

$$\text{angle}(P_1, P') = \text{angle}(P', P_2).$$

Les plans P et P′ sont appelés plans bissecteurs du couple (P_1, P_2).

3° Montrer que P et P′ sont les bases des deux seules symétries orthogonales planes s et s' telles que

$$s(P_1) = P_2 \quad , \quad s'(P_1) = P_2.$$

4° Si P_1 a pour équation $2x + y - z + 1 = 0$, et si P_2 a pour équation $x - y + z + 2 = 0$, déterminer les équations de P et de P′.

6.53 Soit F_1 (resp. F_2) une application d'un intervalle I_1 (resp. I_2) de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}_2$.

Étant donné un point O de E_2, on note $M_1(t)$ (resp. $M_2(u)$) le point de E_2 tel que

$$\overrightarrow{OM_1}(t) = F_1(t) \qquad (\text{resp. } \overrightarrow{OM_2}(u) = F_2(u)) \quad ,$$

et

$$\Gamma_1 = \{M_1(t) \mid t \in I_1\} \qquad (\text{resp. } \Gamma_2 = \{M_2(u) \mid u \in I_2\}).$$

On suppose que Γ_1 et Γ_2 ont un point commun M ($M = M_1(t_1) = M_2(u_2)$) et que F_1 et F_2 sont dérivables et admettent une dérivée non nulle aux points t_1 et u_2.

Il en résulte que Γ_1 et Γ_2 admettent des tangentes Δ_1 et Δ_2 en M. On appelle alors angle de Γ_1 et de Γ_2 en M l'angle des droites Δ_1 et Δ_2.

Montrer que si f est une isométrie de E_2 on peut définir l'angle de $f(\Gamma_1)$ et de $f(\Gamma_2)$ au point $f(M)$ et que celui-ci est égal

- à l'angle de Γ_1 et de Γ_2 en M, lorsque f est une isométrie positive
- à l'opposé de l'angle de Γ_1 et de Γ_2 en M, lorsque f est une isométrie négative.

(Indication : on utilisera le résultat de l'exercice 3.35.)

6.54 Mouvement de rotation.

Dans l'espace affine euclidien orienté E_3, on appelle mouvement de rotation d'axe orienté Δ toute application F de $\mathbb{R}_+$ dans E_3 telle que, si $t \in \mathbb{R}^+$, le point F(t) se déduit du point F(0) par une rotation d'axe orienté Δ et d'« angle » $\theta(t)$ où θ est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\theta(0) = 0.$$

(Nous faisons ici un abus de langage. $\theta(t)$ est une détermination de la mesure de l'angle de la rotation d'axe orienté Δ qui transforme F(0) en F(t).)

1° Soit O la projection orthogonale de F(0) sur Δ et $\vec{i}$ un vecteur unitaire définissant l'orientation de Δ.

Montrer que lorsque θ est dérivable, la vitesse au point M = F(t) existe et vaut

$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{MO} \wedge \theta'(t)\,\vec{i}.$$

2° Montrer que dans ces conditions l'accélération $\Gamma(t)$ au point M est donnée par

$$\vec{\Gamma}(t) = -\,\theta'(t)^2\,\overrightarrow{MO} + \theta''\,\overrightarrow{MO} \wedge \vec{i}.$$

(Indication : on utilisera la dérivée du produit vectoriel et la formule du double produit vectoriel.)

6.55 Conservation du rapport des aires (et des volumes) par une application affine.

On a donné au § 5.8 du tome II de ce cours quelques propriétés du clan $\mathcal{Q}$ des parties quarrables de E_2 et de la mesure $\mathcal{A}$ (aire) sur $\mathcal{Q}$.

1° Soit MNPQ un parallélogramme $(\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP})$ de E_2. Montrer qu'il est quarrable et a pour aire $|\det_B(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ})|$ où B est une base orthonormée ordonnée quelconque de $\mathcal{E}_2$.

2° En déduire que si f est une application affine bijective de E_2 dans lui-même et l l'application linéaire associée à f on a, pour tout parallélogramme P de E_2

$$\mathcal{A}(f(P)) = |\det l|\,\mathcal{A}(P).$$

3° Soit $\mathcal{Q}'$ la partie de $\mathcal{Q}$ ayant pour éléments les parties de E_2 qui sont réunion d'un nombre fini de parallélogrammes, deux quelconques de ces parallélogrammes ne pouvant avoir en commun que les points de leurs côtés.

Si $P_1 \cup \ldots \cup P_n$ est une telle partie ($P_1, \ldots, P_n$ sont des parallélogrammes) montrer que

$$\mathcal{A}(P_1 \cup \ldots \cup P_n) = \mathcal{A}(P_1) + \ldots + \mathcal{A}(P_n).$$

4° Nous admettrons qu'une partie Δ de E_2 appartient à $\mathcal{Q}$ si et seulement si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe deux parties Δ_1, Δ_2 appartenant à $\mathcal{Q}'$ telles que $\Delta_1 \subset \Delta \subset \Delta_2$ et $\mathcal{A}(\Delta_2) - \mathcal{A}(\Delta_1) < \varepsilon$; dans ce cas on a

$$\mathcal{A}(\Delta) = \sup\{\mathcal{A}(\Delta_1) \mid \Delta_1 \in \mathcal{Q}', \Delta_1 \subset \Delta\} = \inf\{\mathcal{A}(\Delta_2) \mid \Delta_2 \in \mathcal{Q}', \Delta \subset \Delta_2\}.$$

Déduire des questions 2° et 3° et de cette caractérisation des éléments de $\mathcal{Q}$ que si f est une application affine bijective de E_2 dans lui-même admettant l pour application linéaire associée on a

$$\forall \Delta \in \mathcal{Q} \qquad f(\Delta) \in \mathcal{Q}$$

et

$$\mathcal{A}(f(\Delta)) = |\det l|\,\mathcal{A}(\Delta).$$

(On exprime souvent ce résultat en disant qu'une application affine bijective conserve le rapport des aires.)

5° En particulier

a) Si f est une affinité de rapport α montrer que

$$\forall \Delta \in \mathcal{Q} \qquad \mathcal{A}(f(\Delta)) = |\alpha|\,\mathcal{A}(\Delta).$$

b) Si f est une homothétie de rapport α montrer que

$$\forall \Delta \in \mathcal{Q} \qquad \mathcal{A}(f(\Delta)) = \alpha^2\,\mathcal{A}(\Delta)$$

c) Si f est une similitude (cf. chap. 7) de rapport μ montrer que

$$\forall \Delta \in \mathcal{Q} \qquad \mathcal{A}(f(\Delta)) = \mu^2 \mathcal{A}(\Delta).$$

6° Nous admettrons de même que dans E_3 il existe un clan $\mathcal{C}$ de parties de E_3 et une mesure $\mathcal{V}$ (appelée volume) sur $\mathcal{C}$ telle que :

(i) Si $\Delta \in \mathcal{C}$ toute partie Δ' de E_3 isométrique à Δ appartient à $\mathcal{C}$ et on a $\mathcal{V}(\Delta') = \mathcal{V}(\Delta)$.
(ii) Si $\Delta \in \mathcal{C}$ et si $\mathcal{V}(\Delta) = 0$ toute partie Δ' contenue dans Δ appartient à $\mathcal{C}$ et est de volume nul.
(iii) Le volume d'un rectangle est nul.
(iv) Le cube (ouvert ou fermé) de côté 1 a pour volume 1.

a) Soit MNPQM'N'P'Q' un parallélipipède. Montrer que son volume est

$$\left|\det_B(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MM'})\right|$$

où B est une base orthonormée ordonnée quelconque de $\mathcal{E}_3$.

b) Soit $\mathcal{C}'$ la partie de $\mathcal{C}$ ayant pour éléments les parties de E_3 qui sont réunion d'un nombre fini de parallélipipèdes, deux quelconques de ces parallélipipèdes ne pouvant avoir en commun que les points de leurs faces.

Nous admettrons qu'une partie Δ de E_3 appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe deux éléments Δ_1, Δ_2 de $\mathcal{C}'$ tels que $\Delta_1 \subset \Delta \subset \Delta_2$ et $\mathcal{V}(\Delta_2) - \mathcal{V}(\Delta_1) < \varepsilon$; dans ce cas on a

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\Delta) &= \sup\{\mathcal{V}(\Delta_1) \mid \Delta_1 \in \mathcal{C}', \Delta_1 \subset \Delta\}\\ &= \inf\{\mathcal{V}(\Delta_2) \mid \Delta_2 \in \mathcal{C}', \Delta_2 \supset \Delta\}.\end{aligned}$$

En raisonnant de même que précédemment, établir que si f est une application affine bijective de E_3 sur lui-même, admettant l pour application linéaire associée, on a

$$\forall \Delta \in \mathcal{C} \qquad \mathcal{V}(f(\Delta)) = |\det l|\, \mathcal{V}(\Delta).$$

7| Similitudes

Nous avons étudié, au chapitre précédent, les applications d'un espace affine euclidien E_n dans lui-même conservant la distance, c'est-à-dire les isométries de E_n.
Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux applications f de E_n dans lui-même telles que, pour tout couple (M, N) de points de E_n, on ait

$$d(f(M), f(N)) = \mu\, d(M, N),$$

où μ est un réel strictement positif ne dépendant pas des points M et N considérés. Ces applications appelées similitudes, sont des éléments du groupe linéaire affine de E_n.
Nous étudions particulièrement les similitudes de E_3 et de E_2 et dans ce dernier cas, en utilisant un isomorphisme du plan euclidien E_2 sur $\mathbb{C}$, nous donnons une représentation complexe de ces similitudes.

7.1 SIMILITUDES DE E_n

a) Définition. Propriété fondamentale.

Définition.
On dit qu'une application f de E_n dans lui-même est une **similitude** s'il existe un réel strictement positif μ tel que

$$\forall (M, N) \in E_n \times E_n \qquad d\big(f(M), f(N)\big) = \mu\, d(M, N).$$

Le réel μ est appelé **rapport** de la similitude.

Une isométrie de E_n est donc une similitude de rapport 1.

Le lemme suivant va nous permettre d'établir que toute similitude de E_n est une application affine.

Lemme.
Soit f une similitude de rapport μ de E_n. Si P est un point de E_n et si H (P, μ) désigne l'homothétie de centre P et de rapport μ, il existe une et une seule isométrie g (resp. g') de E_n telle que $f = H(P, \mu) \circ g$ (resp. $f = g' \circ H(P, \mu)$).

En effet, si on pose $g = H\left(P, \frac{1}{\mu}\right) \circ f$, on a pour tout couple (M, N) de points de E_n :

$$\begin{aligned}d(g(M), g(N)) &= \frac{1}{\mu}\, d(f(M), f(N))\\ &= d(M, N),\end{aligned}$$

ce qui prouve que g est une isométrie de E_n.

On en déduit

$$f = \left[\mathrm{H}\left(\mathrm{P}, \frac{1}{\mu}\right) \right]^{-1} \circ g$$

autrement dit

$$f = \mathrm{H}(\mathrm{P}, \mu) \circ g.$$

De même l'application g' définie par $g' = f \circ \mathrm{H}\left(\mathrm{P}, \frac{1}{\mu}\right)$ est une isométrie de E_n, et on a $f = g' \circ \mathrm{H}(\mathrm{P}, \mu)$.

REMARQUE

Lorsque $\mu = 1$, f est une isométrie et dans ce cas
$$\mathrm{H}(\mathrm{P}, \mu) = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n}, \quad g = g' = f.$$

Que l'on utilise l'une ou l'autre des égalités $f = \mathrm{H}(\mathrm{P}, \mu) \circ g$ ou $f = g' \circ \mathrm{H}(\mathrm{P}, \mu)$, on voit que f est la composée de deux applications affines bijectives de E_n sur lui-même (une homothétie et une isométrie) donc que f est une application affine bijective de E_n sur lui-même.

Théorème.

Toute similitude de E_n est une application affine bijective de E_n sur lui-même.

EXERCICE

1. Montrer que l'application linéaire l associée à une similitude f de E_n est une similitude de $\mathcal{E}_n$ ayant même rapport que f ($\mathcal{E}_n$ étant muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien).

b) Groupe des similitudes de E_n.

Théorème.

L'ensemble des similitudes de E_n est pour la composition des applications un sous-groupe de GLA (E_n). On le note Sim (E_n).

Nous savons déjà que toute similitude de E_n est une bijection affine de E_n sur lui-même donc est un élément de GLA (E_n).

• Si f est une similitude de rapport μ, on a pour tout couple (M, N) de points de E_n

$$\mu\, d(f^{-1}(\mathrm{M}), f^{-1}(\mathrm{N})) = d(f \circ f^{-1}(\mathrm{M}), f \circ f^{-1}(\mathrm{N})) = d(\mathrm{M}, \mathrm{N}),$$

ce qui prouve que f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{\mu}$.

• Si f et g sont deux similitudes de rapports μ et λ, on a pour tout couple (M, N) de points de E_n

$$d(g \circ f(\mathrm{M}), g \circ f(\mathrm{N})) = \lambda\, d(f(\mathrm{M}), f(\mathrm{N})) = \lambda \mu\, d(\mathrm{M}, \mathrm{N}),$$

ce qui prouve que $g \circ f$ est une similitude de rapport $\lambda\,\mu$.

En conclusion : Sim (E_n) est un sous-groupe de GLA (E_n).

REMARQUE

Nous avons établi dans la démonstration précédente que l'application de Sim (E_n) dans $\mathbb{R}_+^*$ qui à une similitude de E_n associe son rapport est un homomorphisme du groupe Sim (E_n) dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$.

EXERCICE

2. Montrer que cet homomorphisme est surjectif. Quel est son noyau ?

c) Similitudes directes, similitudes inverses.

Théorème.

Si l est l'application linéaire associée à une similitude f de rapport μ de E_n, il existe une et une seule transformation orthogonale k de $\mathcal{E}_n$ telle que
$$l = h_\mu \circ k = k \circ h_\mu,$$
h_μ désignant l'homothétie vectorielle de rapport μ.

En effet l étant une similitude de rapport μ de $\mathcal{E}_n$, il existe une et une seule isométrie k de $\mathcal{E}_n$ telle que

$$l = \mathrm{H}(\vec{0}, \mu) \circ k$$

et de l'égalité $l(\vec{0}) = \vec{0}$, on déduit $\mu\, k(\vec{0}) = \vec{0}$ ce qui, μ étant non nul, implique $k(\vec{0}) = \vec{0}$.

Par suite k est une isométrie de $\mathcal{E}_n$ admettant $\vec{0}$ comme point invariant, donc est une transformation orthogonale de $\mathcal{E}_n$.

Comme d'autre part l'homothétie vectorielle $\mathrm{H}(\vec{0}, \mu) = h_\mu$ commute avec tous les endomorphismes de $\mathcal{E}_n$, on obtient $f = h_\mu \circ k = k \circ h_\mu$.

EXERCICE

3. Montrer que k est l'application linéaire associée aux isométries g et g' telles que
$$f = \mathrm{H}(\mathrm{P}, \mu) \circ g = g' \circ \mathrm{H}(\mathrm{P}, \mu).$$

Définition.

Soit f une similitude de rapport μ de E_n et l l'application linéaire associée à f. Si la transformation orthogonale $k = h_{\frac{1}{\mu}} \circ l$ appartient à $\mathrm{O}^+(\mathcal{E}_n)$ on dit que f est une **similitude directe** de E_n ; si k appartient à $\mathrm{O}^-(\mathcal{E}_n)$ on dit que f est une **similitude inverse** de E_n.

EXERCICE

4. Étant donnée une similitude f de rapport μ de E_n on peut écrire
$$f = \mathrm{H}(\mathrm{P}, \mu) \circ g = g' \circ \mathrm{H}(\mathrm{P}, \mu)$$
où g et g' sont des isométries de E_n.
Montrer que f est une similitude directe si et seulement si g (resp. g') est une isométrie positive de E_n.

Nous allons voir, comme conséquence du théorème suivant, que les similitudes directes constituent un sous-groupe de Sim (E_n).

Théorème.

L'application $\mathcal{L}$ de Sim (E_n) dans $\mathrm{O}(\mathcal{E}_n)$ qui à une similitude f de rapport μ associe la transformation orthogonale $k = h_{\frac{1}{\mu}} \circ l$ (où l est l'application linéaire associée à f), est un homomorphisme de groupes.

Soient f et f' deux similitudes de E_n de rapports μ et μ', et l, l' les applications linéaires associées à f et f'.
On a

$$\mathfrak{L}(f) = h_{\frac{1}{\mu}} \circ l$$
$$\mathfrak{L}(f') = h_{\frac{1}{\mu'}} \circ l'.$$

Comme $f' \circ f$ est une similitude de rapport $\mu'\mu$ admettant $l' \circ l$ comme application linéaire associée, on a également

$$\mathfrak{L}(f' \circ f) = h_{\frac{1}{\mu'\mu}} \circ l' \circ l.$$

Or

$$\mathfrak{L}(f') \circ \mathfrak{L}(f) = h_{\frac{1}{\mu'}} \circ l' \circ h_{\frac{1}{\mu}} \circ l$$
$$= h_{\frac{1}{\mu'}} \circ h_{\frac{1}{\mu}} \circ l' \circ l$$

puisqu'une homothétie commute avec tout endomorphisme de $\mathcal{E}_n$.
On obtient finalement

$$\mathfrak{L}(f') \circ \mathfrak{L}(f) = h_{\frac{1}{\mu'\mu}} \circ l' \circ l$$
$$= \mathfrak{L}(f' \circ f)$$

ce qui montre que $\mathfrak{L}$ est un homomorphisme de groupes.

Corollaire.

L'ensemble des similitudes directes de E_n est un sous-groupe de Sim (E_n).

Cet ensemble est l'image réciproque par l'homomorphisme de groupes $\mathfrak{L}$, du sous-groupe $O^+(\mathcal{E}_n)$ de $O(\mathcal{E}_n)$ donc est un sous-groupe de Sim (E_n).

NOTATION

On désignera par $\text{Sim}^+(E_n)$ le groupe des similitudes directes de E_n et par $\text{Sim}^-(E_n)$ l'ensemble des similitudes inverses de E_n.

EXERCICE

5. Montrer que la composée de deux similitudes inverses est une similitude directe.

d) Centre d'une similitude.

Soit f une similitude de rapport μ de E_n et l l'application linéaire associée à f.
Nous supposerons μ *différent de* 1, c'est-à-dire que f n'est pas une isométrie.
Si M est un point de E_n et $M' = f(M)$ son image, on a

$$\forall P \in E_n \quad f(P) = M' + l(\overrightarrow{MP}) \quad ;$$

par suite un point P de E_n est un point invariant de f si et seulement si on a

$$P = M' + l(\overrightarrow{MP}),$$

autrement dit si et seulement si $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MM'} + l(\overrightarrow{MP})$, ce qui s'écrit

$$(\text{Id}_{\mathcal{E}_n} - l)(\overrightarrow{MP}) = \overrightarrow{MM'}.$$

Or, μ étant différent de 1, $\text{Id}_{\mathcal{E}_n} - l$ est un endomorphisme injectif de $\mathcal{E}_n$: en effet si

$$\vec{x} \in \text{Ker}(\text{Id}_{\mathcal{E}_n} - l)$$

on a

$$\vec{x} = l(\vec{x}) \quad , \quad \text{d'où} \quad \|\vec{x}\| = \|l(\vec{x})\|;$$

et comme l est une similitude de $\mathcal{E}_n$ de rapport μ on a aussi

$$\|l(\vec{x})\| = \mu \|\vec{x}\|,$$

ce qui implique

$$\vec{x} = \vec{0}.$$

L'espace vectoriel $\mathcal{E}_n$ étant de dimension finie l'endomorphisme injectif $\text{Id}_{\mathcal{E}_n} - l$ est bijectif; il en résulte qu'il existe un unique vecteur $\vec{u}$ tel que $(\text{Id}_{\mathcal{E}_n} - l)(\vec{u}) = \overrightarrow{MM'}$ et donc un unique point P tel que $(\text{Id}_{\mathcal{E}_n} - l)(\overrightarrow{MP}) = \overrightarrow{MM'}$.
En conclusion :

Théorème et définition.

Une similitude de E_n, de rapport différent de 1, a un et un seul point invariant appelé **centre** de la similitude.

EXERCICE

6. Montrer que l'ensemble ayant pour éléments les similitudes de centre P et l'identité Id_{E_n} est un sous-groupe de Sim (E_n).

Si f est une similitude de centre P, de rapport μ ($\mu \neq 1$) on peut écrire

$$f = H(P, \mu) \circ g = g' \circ H(P, \mu)$$

où g et g' sont des isométries de E_n qui admettent nécessairement P comme point invariant.
Alors, si k est l'application linéaire associée à g on a

$$\forall M \in E_n \quad g(M) = P + k(\overrightarrow{MP})$$

et

$$H(P, \mu) \circ g(M) = P + \mu k(\overrightarrow{MP})$$
$$= P + k(\mu \overrightarrow{MP})$$
$$= g(P + \mu \overrightarrow{MP})$$
$$= g \circ H(P, \mu)(M)$$

d'où

$$H(P, \mu) \circ g = g \circ H(P, \mu)$$

et

$$g' = g.$$

On peut donc énoncer :

Théorème.

Si f est une similitude de E_n, de centre P et de rapport μ différent de 1, il existe une et une seule isométrie g telle que

$$f = H(P, \mu) \circ g = g \circ H(P, \mu),$$

et g admet P comme point invariant.

7. 2 SIMILITUDES DE E_3

Soit f une similitude de E_3, de centre P et de rapport μ, $\mu \neq 1$, et g l'isométrie de E_3 admettant P comme point invariant telle que

$$f = H(P, \mu) \circ g = g \circ H(P, \mu).$$

• Lorsque f est une similitude directe, g est une isométrie positive (cf. § 7.1, exercice 4) et donc g est soit l'identité, soit une rotation ayant pour axe une droite contenant P.

• Lorsque f est une similitude inverse, g est une isométrie négative.
On a alors, en notant s la symétrie de centre P

$$f = H(P, \mu) \circ s \circ s \circ g$$
$$= H(P, -\mu) \circ s \circ g.$$

Comme s est une isométrie négative de E_3,
$s \circ g$ est une isométrie positive de E_3.
$s \circ g$ admet P comme point invariant, donc
$s \circ g$ est soit l'identité, soit une rotation ayant pour axe une droite contenant P.

Concluons :

Théorème.

**Soit f une similitude de E_3 de rapport μ différent de 1 et de centre P.
Si f est une similitude directe (resp. inverse), f est la composée de l'homothétie de centre P et de rapport μ (resp. $-\mu$) et d'une rotation ayant pour axe une droite contenant P ou de l'identité, ces deux applications étant permutables.**

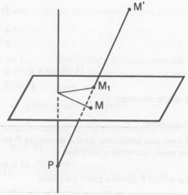
Une similitude directe (resp. inverse) de E_3 qui n'est pas une isométrie est donc caractérisée par :

• son centre P
• son rapport μ
• l'axe Δ et l'angle φ de la rotation g telle que

$$f = H(P, \mu) \circ g \qquad (\text{resp. } f = H(P, -\mu) \circ g).$$

(Cf. fig. 1.)

fig. 1



($M_1 = g(M)$,
$M' = H(P, \mu)(M_1)$)

7. 3 SIMILITUDES DE E_2

a) Décomposition d'une similitude de E_2.

Soit f une similitude de E_2, de centre P, de rapport μ, $\mu \neq 1$, et g l'isométrie de E_2 admettant P comme point invariant telle que

$$f = H(P, \mu) \circ g = g \circ H(P, \mu).$$

• Si f est une similitude directe, g est une isométrie positive de E_2 donc g est soit l'identité soit une rotation de centre P.

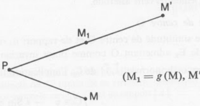
Théorème.

Une similitude directe f de E_2, de rapport μ différent de 1 et de centre P, est la composée de l'homothétie de centre P et de rapport μ et ou bien de l'identité ou bien d'une rotation de centre P, ces deux applications étant permutables.

Lorsque f est la composée de $H(P, \mu)$ et d'une rotation g de centre P, f est déterminée par

— son centre P
— son rapport μ
— l'angle φ de la rotation g, appelé **angle** de la similitude (cf. fig. 2).

fig. 2



($M_1 = g(M)$, $M' = H(P, \mu)(M_1)$)

L'image M' d'un point M de E_2 est alors caractérisée par

$$\text{angle}\,(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PM'}) = \varphi \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{PM'}\| = \mu\,\|\overrightarrow{PM}\|.$$

• Si f est une similitude inverse, g est une isométrie négative de E_2, donc g est une symétrie orthogonale par rapport à une droite contenant P.

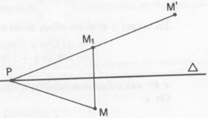
Théorème.

Une similitude inverse f de E_2, de rapport μ différent de 1 et de centre P, est la composée de l'homothétie de centre P et de rapport μ et d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite contenant P, ces deux applications étant permutables.

Dans ce cas f est déterminée par

— son centre P
— son rapport μ
— la base Δ de la symétrie orthogonale g, appelée base (ou axe) de la similitude (cf. fig. 3).

fig. 3



($M_1 = g(M)$, $M' = H(P, \mu)(M_1)$)

EXERCICE

1. Étant donnée une similitude inverse f de E_2 déterminer les droites de E_2 globalement invariantes par f.

b) Représentation complexe d'une similitude.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de E_2.
Si M est un point de E_2 on note (x, y) ses coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; on appelle alors **affixe** de M dans ce repère le nombre complexe $z = x + iy$.
On peut munir canoniquement $\mathbb{C}$ d'une structure d'espace vectoriel euclidien de dimension 2, au moyen du produit scalaire φ défini par :

si $\quad z = x + iy \quad$ et $\quad z' = x' + iy'$

$$\varphi(z, z') = xx' + yy'.$$

Dans ce cas la base canonique $\{1, i\}$ de $\mathbb{C}$ est orthonormée.
Il en résulte que $\mathbb{C}$ est aussi canoniquement muni d'une structure d'espace affine euclidien de dimension 2, et alors l'application de E_2 dans $\mathbb{C}$ qui au point M associe son affixe est un isomorphisme d'espaces affines euclidiens.

EXERCICE

2. Démontrer cette assertion.

1. *Similitudes de centre* O.

Si f est une similitude de centre O et de rapport μ, on a $f = H(O, \mu) \circ g$ où g est une isométrie de E_2 admettant O comme point invariant.
Dans la base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ de $\mathcal{E}_2$, l'application linéaire k associée à g a une matrice du type

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}\,\varphi & -\varepsilon\,\text{Sin}\,\varphi \\ \text{Sin}\,\varphi & \varepsilon\,\text{Cos}\,\varphi \end{pmatrix}$$

où

$$\varepsilon = +1 \quad \text{si} \quad g \in \text{Is}^+(E_2)$$
$$\varepsilon = -1 \quad \text{si} \quad g \in \text{Is}^-(E_2).$$

Alors les coordonnées (x', y') de l'image M′ du point M (x, y) sont données par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \text{Cos}\,\varphi & -\varepsilon\,\text{Sin}\,\varphi \\ \text{Sin}\,\varphi & \varepsilon\,\text{Cos}\,\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$x' = \mu x\,\text{Cos}\,\varphi - \varepsilon\mu y\,\text{Sin}\,\varphi$$
$$y' = \mu x\,\text{Sin}\,\varphi + \varepsilon\mu y\,\text{Cos}\,\varphi.$$

En notant z et z' les affixes de M et M′, on obtient

$$z' = \mu x\,\text{Cos}\,\varphi - \varepsilon\mu y\,\text{Sin}\,\varphi + i\,\mu x\,\text{Sin}\,\varphi + i\varepsilon\mu y\,\text{Cos}\,\varphi$$
$$= \mu(\text{Cos}\,\varphi + i\,\text{Sin}\,\varphi)(x + \varepsilon iy).$$

• **1er cas** : f est une similitude directe, c'est-à-dire $\varepsilon = +1$.
On a

$$z' = az \quad \text{où} \quad a = \mu(\text{Cos}\,\varphi + i\,\text{Sin}\,\varphi),$$

φ étant l'angle de la rotation g.

Théorème.

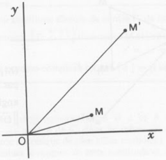
Si f est une similitude directe de centre O, de rapport μ et d'angle φ, on a entre l'affixe z d'un point M et l'affixe z' de son image $M' = f(M)$ la relation

$$z' = az$$

où a est le nombre complexe tel que

$$|a| = \mu \quad \text{et} \quad \text{Arg}\,a = \varphi.$$

fig. 4



$(\text{angle}\,(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \varphi,$
$\|\overrightarrow{OM'}\| = \mu\,\|\overrightarrow{OM}\|)$

EXERCICE

3. Montrer réciproquement que si $a \in \mathbb{C}$ l'application $z \longmapsto az$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même est une similitude directe de $\mathbb{C}$ (muni de sa structure canonique de plan affine euclidien) admettant pour centre le zéro de $\mathbb{C}$, et de rapport $|a|$.

REMARQUE

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes a été défini dans le tome I de ce cours, comme étant l'ensemble des matrices du type

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

A une similitude directe f, de centre O, de E_2 on a associé, de manière unique, une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ telle que les coordonnées (x', y') de l'image M′ d'un point M (x, y) de E_2 soient données par

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

réciproquement, étant donnée une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, l'application de E_2 dans lui-même qui au point M (x, y) associe le point M′ (x', y') tel que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est une similitude directe de E_2, de centre O (c'est une conséquence de l'exercice ci-dessus). Il en résulte que l'on établit ainsi une bijection de l'ensemble des similitudes directes de centre O de E_2 sur l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

• **2e cas** : f est une similitude inverse, c'est-à-dire $\varepsilon = -1$.
On a

$$z' = a\bar{z} \quad \text{où} \quad a = \mu(\text{Cos}\,\varphi + i\,\text{Sin}\,\varphi).$$

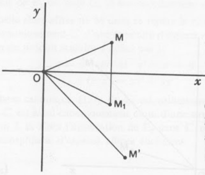
Théorème.

Si f est une similitude inverse de centre O, de rapport μ, on a entre l'affixe z d'un point M et l'affixe z' de son image $M' = f(M)$ la relation

$$z' = a\bar{z}$$

où a est un nombre complexe tel que $|a| = \mu$.

fig. 5



(M_1 est le symétrique de M par rapport à Ox, angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \operatorname{Arg} a$, $\|\overrightarrow{OM'}\| = |a| \, \|\overrightarrow{OM_1}\| = |a| \, \|\overrightarrow{OM}\|$)

EXERCICE

4. Montrer réciproquement que si $a \in \mathbb{C}$ l'application $z \longmapsto a\bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même est une similitude inverse de $\mathbb{C}$ (muni de sa structure canonique de plan affine euclidien) admettant pour centre le zéro de $\mathbb{C}$, et de rapport $|a|$.

REMARQUE

On peut convenir lorsque f est une similitude inverse de centre O représentée par l'application $z \longmapsto a\bar{z}$ d'appeler angle de f l'Argument de a.

EXERCICE

Montrer que lorsque f est une similitude inverse de centre O représentée par $z \longmapsto a\bar{z}$, la base de f est la droite Δ contenant O telle que angle $((OI), \Delta) = \dot{\psi}$ où $\dot{\psi}$ est l'élément de $\mathcal{A}'$ tel que $\mu(\dot{\psi}) = \operatorname{Arg} a$. (Rappelons que $\mu(\dot{\psi})$ est l'élément $\psi + \psi$ de $\mathcal{A}$, ψ étant un représentant quelconque de $\dot{\psi}$, et que μ est un isomorphisme de $\mathcal{A}'$ sur $\mathcal{A}$.)

2. *Similitudes de centre* P, P *différent de* O.

Soit f une similitude de E_2, de centre P et de rapport μ.

Nous noterons (x, y) (resp. (X, Y)) les coordonnées d'un point M de E_2 dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (resp. $(P, \vec{i}, \vec{j})$) et z (resp. Z) l'affixe $x + iy$ (resp. $X + iY$) de M dans ce repère.

EXERCICE

5. Si $z_0 = x_0 + iy_0$ est l'affixe de P dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, établir que pour tout point M de E_2 on a

$$z = z_0 + Z.$$

• Lorsque f est une similitude directe, l'affixe Z', dans le repère $(P, \vec{i}, \vec{j})$, de $M' = f(M)$ est donnée par

$$Z' = aZ$$

où $|a| = \mu$ et où $\operatorname{Arg} a$ est l'angle de f;

on en déduit

$$z' - z_0 = a(z - z_0)$$

c'est-à-dire

$$z' = az + (1 - a) z_0.$$

En posant

$$b = (1 - a) z_0,$$

on obtient :

Théorème.

Si f est une similitude directe de centre P, de rapport μ et d'angle φ, on a entre l'affixe z (dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$) d'un point M et l'affixe z' de son image $M' = f(M)$, la relation

$$z' = az + b$$

où a est le nombre complexe tel que $|a| = \mu$ et $\operatorname{Arg} a = \varphi$ et où b appartient à $\mathbb{C}$.

EXERCICE

6. Montrer réciproquement que si a et b sont des éléments de $\mathbb{C}$ l'application $z \longmapsto az + b$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même est une similitude directe de $\mathbb{C}$ (muni de sa structure canonique de plan affine euclidien).

Déterminer le rapport de cette similitude et, lorsque celui-ci est différent de 1, l'affixe de son centre et son angle.

• Lorsque f est une similitude inverse, l'affixe Z', dans le repère $(P, \vec{i}, \vec{j})$ de $M' = f(M)$ est donnée par

$$Z' = a\bar{Z}$$

où a est un nombre complexe tel que $|a| = \mu$.

On en déduit

$$z' - z_0 = a(\bar{z} - \bar{z}_0)$$

c'est-à-dire

$$z' = a\bar{z} + z_0 - a\bar{z}_0.$$

En posant $b = z_0 - a\bar{z}_0$ on obtient :

Théorème.

Si f est une similitude inverse de centre P, et de rapport μ, on a entre l'affixe z (dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$) d'un point M et l'affixe z' de son image $M' = f(M)$ la relation

$$z' = a\bar{z} + b$$

où a est un nombre complexe tel que $|a| = \mu$ et où b appartient à $\mathbb{C}$.

EXERCICE

7. Montrer réciproquement, que si a et b sont des éléments de $\mathbb{C}$, l'application $z \longmapsto a\bar{z} + b$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même est une similitude inverse de $\mathbb{C}$ (muni de sa structure canonique de plan affine euclidien).

Déterminer le rapport de cette similitude.

Lorsque celui-ci est différent de 1 quel est l'affixe du centre de la similitude? Quelle est sa base?

EXERCICES

7.1 Soit f une similitude inverse de E_2, de rapport μ.
1° Montrer que l'on peut considérer d'une infinité de manières, f comme la composée d'une homothétie de rapport μ et d'une symétrie orthogonale axiale de E_2.
Établir que tous les axes de ces symétries sont parallèles.
2° Comment sont les images par f de droites parallèles ou orthogonales à ces axes?

7.2 Soient A, B, A′, B′ quatre points de E_2 tels que $A \neq B$, $A' \neq B'$.
Montrer qu'il existe exactement deux similitudes f de E_2 telles que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, que l'une est directe et l'autre inverse.

7.3 Soit O un point de E_2.
Montrer que, si A et B sont deux points de E_2 distincts de O, il existe exactement deux similitudes de centre O transformant A en B, que l'une est directe et l'autre inverse.

7.4 Soient O un point de E_2 et D une droite de E_2 ne contenant pas O.
On note H la projection orthogonale de O sur D.
1° Montrer que pour tout point P de D il existe une et une seule similitude directe f de centre O telle que $f(H) = P$.
Si $\varphi = \text{angle}\,(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OP})$ exprimer le rapport de la similitude f en fonction de φ.
2° On considère l'ensemble F des similitudes f de centre O telles que $f(H) \in D$.
Quel est l'ensemble des transformés d'un point M de E_2 par les éléments de F?

7.5 Triangles semblables

Soient A, B, C (resp. A′, B′, C′) trois points non alignés de E_2.
1° Montrer que s'il existe une similitude f de E_2 telle que

$$f(A) = A' \quad , \quad f(B) = B' \quad , \quad f(C) = C' \quad ,$$

f est la seule similitude ayant cette propriété. Lorsque f est directe (resp. inverse) on dit que les triangles ABC et A′B′C′ sont directement semblables (resp. inversement semblables).
2° Montrer qu'une telle similitude existe si et seulement si on a

$$\frac{\|\overrightarrow{A'B'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{B'C'}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\|\overrightarrow{C'A'}\|}{\|\overrightarrow{CA}\|}.$$

3° Établir que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) ABC et A′B′C′ sont directement semblables.
(ii) $\dfrac{\|\overrightarrow{A'B'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{A'C'}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$ et $\text{angle}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{angle}\,(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.
(iii) $\text{angle}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{angle}\,(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$
et $\text{angle}\,(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \text{angle}\,(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'})$.
4° Établir que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) ABC et A′B′C′ sont inversement semblables.
(ii) $\dfrac{\|\overrightarrow{A'B'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{A'C'}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$ et $\text{angle}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \text{angle}\,(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \omega$.
(iii) $\text{angle}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \text{angle}\,(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \omega$
et $\text{angle}\,(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \text{angle}\,(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}) = \omega$.

7.6 Soient ABC, A′B′C′ deux triangles de E_2 tels que
- les droites (AB) et (A′B′) sont parallèles
- les droites (BC) et (B′C′) sont parallèles
- les droites (CA) et (C′A′) sont parallèles.

Montrer que ABC et A′B′C′ sont directement semblables.

7.7 Soient f une isométrie positive de E_2, A, B, C, trois points non alignés de E_2 et A′, B′, C′ leurs images par f.
On note A″ le milieu de A et A′, B″ le milieu de B et B′, C″ le milieu de C et C′.
Montrer que les triangles ABC et A″B″C″ sont directement semblables.

7.8 Soient A, B, C, A′, B′, C′ six points de E_3 tels que
- les points A, B, C ne sont pas alignés
- $$\frac{\|\overrightarrow{A'B'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{B'C'}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\|\overrightarrow{C'A'}\|}{\|\overrightarrow{CA}\|} = \mu \neq 0.$$

1° Soient A″, B″, C″ les images de A′, B′, C′ par une homothétie de rapport $1/\mu$.
Montrer que

$$\|\overrightarrow{A''B''}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \quad , \quad \|\overrightarrow{B''C''}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \quad , \quad \|\overrightarrow{C''A''}\| = \|\overrightarrow{CA}\|.$$

2° En utilisant le résultat de l'exercice 6.50 conclure qu'il existe deux similitudes de E_3 transformant respectivement A, B, C en A′, B′, C′, que l'une est directe et l'autre inverse.

7.9 Dans E_2 orienté on considère la similitude f de centre O, d'angle δ_+ et de rapport μ. Étant donné un point P de E_2 distinct de O, quel est l'ensemble des points M de E_2 tels que M, $f(M)$ et P soient alignés.

7.10 1° Soit f une similitude de E_2, de centre O.
Si D est une droite de E_2 ne contenant pas O, on note H la projection orthogonale de O sur D.
Montrer que $f(D)$ est la droite contenant $H' = f(H)$ et orthogonale à (OH′).
2° Soient D et D′ deux droites de E_2.
a) Montrer que tout point de E_2 n'appartenant ni à D ni à D′ est le centre d'une et d'une seule similitude directe transformant D en D′.
b) Montrer que tout point de E_2 n'appartenant ni à D ni à D′ est le centre d'une et d'une seule similitude inverse transformant D en D′.
c) Quel est l'ensemble des centres des similitudes directes (resp. inverses) de rapport μ transformant D en D′?

7.11 Soit Φ l'application de $\text{Sim}^+(E_2)$ dans $\mathcal{A} \times \mathbb{R}_+^*$ qui à f associe le couple (φ, μ) où φ est l'angle de f et μ son rapport.
1° Montrer que $\mathcal{A} \times \mathbb{R}_+^*$ muni de la loi

$$(\varphi, \mu) * (\varphi', \mu') = (\varphi + \varphi', \mu\mu')$$

est un groupe commutatif.
2° Montrer que Φ est un homomorphisme de groupes, surjectif mais non injectif.
3° Montrer que, si O est un point de E_2, la restriction de Φ au groupe des similitudes directes de centre O est un isomorphisme de ce groupe sur $\mathcal{A} \times \mathbb{R}_+^*$.

7.12 Dans E_2 orienté, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A, B, C, A′, B′, C′ d'affixes respectives a, b, c, a', b', c' telles que $a \neq b \neq c$, $a' \neq b' \neq c'$.
1° Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) les triangles ABC et A′B′C′ sont directement semblables (cf. exercice 7.5).
(ii) $\dfrac{c' - a'}{b' - a'} = \dfrac{c - a}{b - a}$
(iii) le déterminant $\begin{vmatrix} a & a' & 1 \\ b & b' & 1 \\ c & c' & 1 \end{vmatrix}$ est nul
2° Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) les triangles ABC et A′B′C′ sont inversement semblables.
(ii) $\dfrac{c' - a'}{b' - a'} = \overline{\left(\dfrac{c - a}{b - a}\right)}$

(iii) le déterminant $\begin{vmatrix} \bar{a} & a' & 1 \\ \bar{b} & b' & 1 \\ \bar{c} & c' & 1 \end{vmatrix}$ est nul.

7.13 Étudier dans le plan complexe la similitude directe

$$z \longmapsto \sqrt{2}\, i\, z + 1.$$

(On donnera le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.)

7.14 Étudier dans le plan complexe la similitude directe

$$z \longmapsto 2\, j\, z + 3.$$

(On donnera le centre, l'angle et le rapport de cette similitude.)

7.15 Quels sont la base et le rapport de la similitude inverse du plan complexe $z \longmapsto (1+i)\bar{z} - i$?

7.16 Quels sont la base et le rapport de la similitude inverse du plan complexe $z \longmapsto 2\, j\, \bar{z} + j^2$?

7.17 Dans E_2 orienté par un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la similitude f qui au point M d'affixe z associe le point d'affixe $(\sqrt{3} - i)\, z + 2\, i$, et la rotation g de centre $\Omega\ (1 - i)$ et d'angle φ, où une détermination de la mesure de φ est $\frac{3\pi}{4}$. Quelle est l'affixe de $g \circ f\,(M)$?

7.18 Dans le plan affine euclidien E_2 orienté, muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $1 + i$, $3 + 4\, i$, $4 - i$.
Déterminer l'unique similitude directe f telle que $f(B) = A$, $f(C) = B$.
(On précisera le centre, le rapport et l'angle de f.)

7.19 Dans le plan affine euclidien orienté E_2, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A, B, A', B' d'affixes respectives 3, 1, i, $2\, i$.
Quelle est la similitude directe f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$? On déterminera son centre, son rapport et son angle.

7.20 Dans le plan affine euclidien E_2 orienté, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la similitude directe f ayant pour centre le point A d'affixe $2 + i$, d'angle φ dont une détermination de la mesure est $-\frac{\pi}{4}$, et de rapport 2.
1° Si z est l'affixe d'un point M de E_2, déterminer en fonction de z l'affixe z' de $M' = f(M)$.
2° En déduire les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.
3° Quelle est l'image de la droite d'équation $x = 3$?

7.21 Dans le plan affine euclidien orienté E_2, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les ploints P et M d'affixes respectives

$$1 + 2\, i \quad \text{et} \quad 1 - 2\sqrt{2} + 2\, i\,(1 + \sqrt{2}).$$

On note O' le point commun à la droite (PM) et à la droite D $(O, \vec{i})$, et D la droite contenant O' et orthogonale à (PM).
1° Quelles sont les affixes de O' et des points M_1, M_2 de D tels que $\|\overrightarrow{PM_1}\| = \|\overrightarrow{PM_2}\| = \|\overrightarrow{PM}\|$?
2° Soit P' l'image de P par la rotation de centre O' et d'angle φ, où une détermination de la mesure de φ est $-\frac{3\pi}{4}$.
a) Quelle est l'affixe de P'?
b) Déterminer angle $(\overrightarrow{P'M_1}, \overrightarrow{P'M_2})$.

8 | Coniques

Les coniques auraient été considérées systématiquement pour la première fois par le mathématicien grec MENAECHME *(IVe siècle avant J.-C.), élève de* PLATON *et d'*EUDOXE *de Cnide. C'est en tant qu'intersection d'un plan et d'un cône de révolution qu'il les considéra, d'où le nom de « sections coniques », plus tard abrégé en coniques. L'œuvre de Menaechme n'est connue que par les références qu'y font des auteurs postérieurs. Il en est de même des quatre livres qu'*EUCLIDE *(aux environs de 300 avant J.-C.) écrivit sur le sujet. En revanche, sept des huit livres consacrés aux coniques par* APOLLONIUS *de Perge, qui vivait à Alexandrie dans la seconde moitié du IIIe siècle avant J.-C., ont été conservés. C'est lui qui aurait introduit les termes d'ellipse, d'hyperbole et de parabole. Il démontra que les coniques s'obtenaient comme sections planes, non seulement des cônes de révolution, mais de tout cône à base circulaire, et il donna une théorie « élémentaire » détaillée des coniques, à laquelle il ne manquait que la propriété relative à un foyer et à la directrice associée qui fut découverte par* PAPPUS *d'Alexandrie (aux environs de 320 après J.-C.).*

Les mathématiciens grecs connaissaient les propriétés des coniques que nous qualifierions aujourd'hui de métriques et d'affines.

Au dix-septième siècle, avec DESARGUES *et* DESCARTES, *deux nouveaux points de vue interviennent. Desargues utilise le fait que les coniques sont les sections planes des cônes à base circulaire (que les Anciens connaissaient, mais que, menant une étude de pure géométrie plane, ils n'avaient pas exploité) pour les considérer comme projection conique d'un cercle et mettre en évidence leurs propriétés projectives. Descartes crée la géométrie analytique qui permet de montrer que les coniques sont les courbes du plan qui par rapport à un repère, que l'on appelle précisément cartésien en l'honneur de Descartes, ont une équation du type*

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0.$$

C'est également au début du XVIIe siècle, exactement en 1609, que KÉPLER *énonça les premières lois expérimentales portant son nom, dont la première est que par rapport à un repère affine (O, a, b, c) où O est le soleil, et a, b, c, trois étoiles (assimilés à des points, ainsi que le soleil), les planètes décrivent des ellipses dont O est un des foyers. Et c'est en utilisant les lois de Képler, que* NEWTON *découvrit en 1666 et publia en 1687, la loi de la gravitation universelle, qui permit de rendre compte du mouvement des planètes, même lorsque les lois de Képler ne furent plus considérées que comme une première approximation. L'étude qui suit part de la représentation analytique des coniques, et se borne à une classification des coniques, à la mise en évidence de leurs éléments essentiels et de certaines de leurs plus importantes propriétés.*

I. Courbes algébriques du second degré

8. 1 DÉFINITION

Le programme invite à étudier les courbes planes représentées dans un repère orthonormé par des équations de la forme

(1) $$AX^2 + BY^2 + 2\,CX + 2\,DY + E = 0$$

avec $$|A| + |B| \neq 0.$$

Cela signifie que l'on veut étudier pour tout quintuplet de réels (A, B, C, D, E) satisfaisant à la condition $|A| + |B| \neq 0$, et pour tout repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2, l'ensemble des points de E_2, dont les coordonnées (X, Y) par rapport à $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ vérifient la relation

$$AX^2 + BY^2 + 2\,CX + 2\,DY + E = 0.$$

La condition $|A| + |B| \neq 0$ a pour but d'écarter le cas où la relation se réduirait à $2\,CX + 2\,DY + E = 0$, et où l'ensemble serait :

- une droite si $|C| + |D| \neq 0$,
- le vide si $|C| + |D| = 0$ et $E \neq 0$,
- le plan si $C = D = E = 0$.

La relation (1) est de la forme P (X, Y) = 0 où P est un polynôme du 2^e degré, dont le terme en XY a un coefficient nul. On pourrait penser obtenir un ensemble plus riche de parties de E_2, en s'affranchissant d'une part de la condition que P ne comporte pas de terme en XY, et d'autre part de la condition que le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ soit orthonormé. Les deux exercices suivants ont pour objet de prouver qu'il n'en est rien et de nous permettre d'affirmer que les courbes que nous allons étudier sont celles qui ont, par rapport à un repère cartésien de E_2, une équation algébrique du second degré, c'est-à-dire de la forme P (X, Y) = 0, où P est un polynôme du second degré en X, Y.

EXERCICES

1. (i) (X, Y) étant les coordonnées d'un point M de E_2 par rapport à un repère cartésien R, à quelle condition les formules

(1) $$X = X_0 + \alpha x + \beta y$$
$$Y = Y_0 + \gamma x + \delta y$$

peuvent-elles être considérées comme exprimant (X, Y) en fonction des coordonnées (x, y) de M par rapport à un repère cartésien r.

(ii) Soit $P\,(X, Y) = AX^2 + 2\,B \times Y + CY^2 + 2\,DX + 2\,EY + F$ un polynôme du second degré en (X, Y). Exprimant X et Y en fonction de x et y au moyen des formules (1), montrer qu'il existe un polynôme p du second degré en (x, y), tel que l'on ait, quels que soient X et Y

$$P\,(X, Y) = p\,(x, y).$$

(iii) On veut montrer que le degré de p est exactement 2, et on se propose de le faire de plusieurs manières différentes.
Le premier procédé consiste à utiliser le caractère bijectif de l'application qui à (x, y) associe (X, Y).

(iv) Les autres procédés consistent à calculer les coefficients respectifs a, $2b$, c de x^2, xy, y^2 dans $p\,(x, y)$ en fonction des coefficients respectifs A, 2 B, C de X^2, XY, Y^2 dans P (X, Y) et de α, β, γ, δ, et à montrer que a, b, c ne peuvent être tous les trois nuls. si A, B, C ne sont pas tous nuls. A cet effet on pourra :

- considérer les relations $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ comme des équations en A, B, C et calculer le déterminant de la matrice des coefficients de ces équations.
- montrer que de « $a = b = c = 0$ » on déduit que la forme quadratique
$$(u, v) \longmapsto A\,u^2 + 2\,B\,uv + C\,v^2$$
s'annule pour 3 éléments d'une partie libre de $\mathbb{R}^2$, ce qui implique $A = B = C = 0$.

2. (X, Y) étant les coordonnées d'un point M de E_2 dans un repère orthonormé direct $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, exprimer X et Y en fonction des coordonnées (X′, Y′) du même point M dans le repère $(\Omega, \vec{i}', \vec{j}')$ déduit de $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ par la rotation d'angle φ.
Les coefficients A, B, C, D, E, F étant donnés, il existe des coefficients A′, B′, C′, D′, E′, F′ tels que l'on ait, quels que soient X et Y
$$AX^2 + 2\,BXY + CY^2 + 2\,DX + 2\,EY + F$$
$$= A'X'^2 + 2\,B'X'Y' + C'Y'^2 + 2\,D'X' + 2\,E'Y' + F'$$
- Calculer A′, B′, C′ en fonction de A, B, C et de φ.
- Calculer $A' + C'$ et $A'C' - B'^2$ en fonction de A, B, C.
- Montrer que l'on peut trouver φ tel que l'on ait $B' = 0$.

Nous résumons les conclusions des exercices 1 et 2 ci-dessus.

Théorème et définition.

Si une courbe a, par rapport à un repère cartésien de E_2, une équation de la forme P(X, Y) = 0 où P est un polynôme du second degré, elle a une équation de la même forme par rapport à tout repère cartésien de E_2.
Une telle courbe est appelée **courbe algébrique du second degré** ou **conique.**
Pour une telle courbe, il existe au moins un repère orthonormé par rapport auquel son équation est de la forme

$$AX^2 + BY^2 + 2\,CX + 2\,DY + E = 0.$$

EXERCICE

3. Montrer que l'intersection d'une conique et d'une droite a au plus deux éléments.

8. 2 FORMES RÉDUITES DE L'ÉQUATION DES CONIQUES

Nous étudions donc les courbes qui par rapport à un repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ ont une équation du type

$$P\,(X, Y) = AX^2 + BY^2 + 2\,CX + 2\,DY + E = 0.$$

Le polynôme P est la somme d'un trinôme du second degré en X et d'un trinôme du second degré en Y, si A et B sont tous deux non nuls; il est la somme d'un trinôme du second degré par rapport à une des variables et d'un polynôme de degré au plus égal à 1 par rapport à l'autre si AB = 0.
Nous allons distinguer ces deux cas, et constater qu'ils correspondent à des courbes ayant des propriétés différentes.

Cas AB = 0.

Supposons $$B = 0 \quad \text{et} \quad A \neq 0.$$

Si l'on a D = 0, $P\,(X, Y) = AX^2 + 2\,C + E.$ P est un trinôme du second degré en X, et on peut distinguer les cas suivants :

• $C^2 - EA > 0$, le trinôme a deux racines X_1 et X_2; l'équation de la conique s'écrit $A(X - X_1)(X - X_2) = 0$, et la courbe est la réunion des deux droites parallèles $X = X_1$ et $X = X_2$.

• $C^2 - EA = 0$, le trinôme s'écrit $A\left(X + \frac{C}{A}\right)^2$, la courbe est la droite $X = -\frac{C}{A}$.

• $C^2 - EA < 0$, le trinôme ne s'annule pour aucune valeur réelle de X, la courbe est l'ensemble vide.

Supposons désormais $D \neq 0$.
Le polynôme P peut s'écrire :

$$P(X, Y) = A\left(X + \frac{C}{A}\right)^2 + 2D\left(Y + \frac{EA - C^2}{2D}\right).$$

Si O est le point de coordonnées $\left(-\frac{C}{A}, \frac{C^2 - EA}{2D}\right)$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, et si (x, y) sont les coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du point de coordonnées (X, Y) dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, on a

$$x = X + \frac{C}{A} \qquad y = Y + \frac{EA - C^2}{2D}$$

et la courbe a pour équation dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$Ax^2 + 2Dy = 0.$$

A étant non nul, on peut poser $\frac{D}{A} = -p$, et obtenir l'équation sous la forme

$$x^2 - 2py = 0.$$

La courbe apparaît dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ comme le graphe de l'application $x \longmapsto \frac{x^2}{2p}$, de ℝ dans ℝ, déjà étudiée (fig. 1).

La courbe est appelée **parabole** d'axe $D(O, \vec{j})$, de **sommet** O, de **paramètre** *p*.
On dit que $D(O, \vec{i})$ est la tangente au sommet.

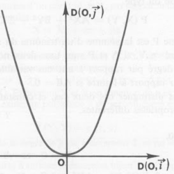


fig. 1

REMARQUE

Dans ce qui précède p est un réel non nul, et l'axe $D(O, \vec{j})$ est considéré comme orienté par $\vec{j}$.
Il arrive souvent que l'on désigne par « paramètre de la parabole » le réel positif $|p|$. Dans ce cas, la donnée de l'axe, du sommet et du paramètre est insuffisante pour déterminer la parabole : il faut de plus préciser dans quel demi-plan déterminé par la droite $D(O, \vec{i})$ elle se trouve.

EXERCICES

1. Écrire l'équation de la tangente à la parabole d'équation $X^2 - 2pY = 0$ au point d'abscisse X, ainsi que l'équation de la normale en ce point (la normale est la droite orthogonale à la tangente et passant par le point de contact de cette dernière avec la courbe).
2. Montrer que la seule normale à la parabole qui ne la rencontre qu'en un point est la normale en O.
En déduire que le groupe des isométries laissant la parabole invariante est constitué de l'identité et de la symétrie par rapport à $D(O, \vec{j})$.

Cas $AB \neq 0$.

Le polynôme P peut être écrit

$$P(X, Y) = A\left(X + \frac{C}{A}\right)^2 + B\left(Y + \frac{D}{B}\right)^2 + E - \frac{C^2}{A} - \frac{D^2}{B}.$$

O étant le point de coordonnées $\left(-\frac{C}{A}, -\frac{D}{B}\right)$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, on voit (comme dans le cas précédent), que la courbe a pour équation dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$Ax^2 + By^2 + k = 0$$

si l'on pose $$k = E - \frac{C^2}{A} - \frac{D^2}{B}.$$

Il apparaît immédiatement sur cette équation que la courbe est globalement invariante par les symétries orthogonales par rapport à $D(O, \vec{i})$ et $D(O, \vec{j})$ et par la symétrie de centre O.
Pour une étude plus précise, nous distinguerons le cas $AB > 0$ et le cas $AB < 0$.

Cas $AB > 0$.

Si A, B, k sont tous trois strictement positifs (ou négatifs) aucun couple de réels (x, y) ne vérifie l'équation; la courbe est l'ensemble vide.
Si k est nul, le seul point vérifiant l'équation est le point O.
Si k est de signe contraire à A (et B), en posant $\frac{k}{A} = -a^2$, $\frac{k}{B} = -b^2$, où a et b sont deux réels strictement positifs, l'équation devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La courbe est incluse dans le rectangle défini par $|x| \leqslant a$ et $|y| \leqslant b$.

Définition

On dit qu'une partie A d'un espace métrique E est **bornée** si l'ensemble des distances $d(M, N)$ des couples (M, N) de points de A est majoré.

EXERCICE

3. Montrer que la définition précédente est équivalente à la suivante :
Pour tout point O de E, l'ensemble des distances $d(O, M)$ de O aux points M de A, est majoré.

Cette définition nous permet d'énoncer :

La courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ est une partie bornée de E_2.

En vertu des symétries signalées, il suffit pour connaître la forme de cette courbe d'en étudier la partie contenue dans le quadrant $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

Cette partie n'est autre que le graphe de la fonction $x \longmapsto b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ de $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$, qui est continue et qui admet en tout point x de $[0, a[$ une dérivée égale à $\dfrac{-bx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$.

La fonction décroît de b à 0. La dérivée est nulle pour $x = 0$; la tangente au point $(0, b)$ est la droite $y = b$.
Exprimant x en fonction de y, on montre de même que la tangente au point $(a, 0)$ est la droite $x = a$.

La courbe est appelée **ellipse** de **centre** O, d'axes $D(O, \vec{i})$ et $D(O, \vec{j})$ (fig. 2).

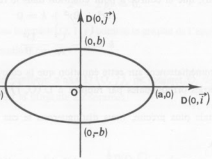


fig. 2

Les points $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ sont appelés **sommets** de l'ellipse.
Si $a = b$, l'ellipse n'est autre que le cercle de centre O et de rayon a.

EXERCICE

4. Étudier l'application $M \longmapsto d(O, M)$ quand le point M décrit l'ellipse d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad , \quad a > b.$$

Cas $AB < 0$.

Si $k = 0$, l'équation s'écrit $Ax^2 + By^2 = 0$, soit $Y^2 = \lambda^2 X^2$ avec $\lambda^2 = -\frac{A}{B}$, et la courbe est la réunion des deux droites d'équations $Y = \lambda X$ et $Y = -\lambda X$.

Si $k \neq 0$, k est soit du signe de A, soit du signe de B. Supposons $Ak > 0$ et posons
$$\frac{k}{A} = a^2 \qquad \frac{k}{B} = -b^2$$
a et b étant des réels strictement positifs. L'équation devient
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

La courbe est à l'extérieur de la bande $|y| < b$. La partie de la courbe située dans le premier quadrant $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, est le graphe de la fonction $x \longmapsto b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$ de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$, fonction qui est continue et admet en tout point x une dérivée égale à $\dfrac{b}{a^2}\dfrac{x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}$, laquelle est nulle pour $x = 0$ et positive pour $x > 0$.

La fonction croît de 0 à $+\infty$.

Remarquant que $\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{x}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}}$,

on voit que l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse x est la somme de $\frac{bx}{a}$ et de $\dfrac{b}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}}$.

L'arc de la courbe situé dans le premier quadrant est donc au-dessus de la droite d'équation $y = \frac{bx}{a}$. Mais la fonction $x \longmapsto \dfrac{b}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a}}$ a pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$. La courbe admet donc la droite d'équation $y = \frac{bx}{a}$ pour asymptote. Les symétries signalées permettent de tracer la courbe complète (fig. 3).

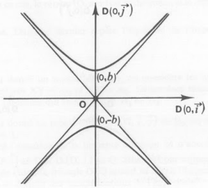


fig. 3

Elle est appelée **hyperbole**. Les droites $D(O, \vec{i})$ et $D(O, \vec{j})$ en sont les **axes**. L'axe $D(O, \vec{j})$ est le seul des deux axes à rencontrer la courbe; ce fait est parfois rappelé en disant que c'est l'**axe transverse**.

Les points $(0, b)$ et $(0, -b)$ sont appelés les **sommets** de l'hyperbole.

EXERCICE

5. Étudier la disposition de la courbe en supposant $Bk > 0$ au lieu de $Ak > 0$.

Résumé.

Lorsque la conique est une réunion de droites, ou est réduite à un point, on dit qu'elle est **dégénérée.** Nous avons trouvé trois types distincts de coniques non dégénérées :

(i) la **parabole,** qui est un ensemble de points non borné, admettant un seul axe de symétrie et aucun centre ;

(ii) l'**ellipse** et l'**hyperbole** qui ont deux axes de symétrie et un seul centre, et que l'on appelle coniques à centre. L'ellipse est un ensemble de points borné, l'hyperbole un ensemble non borné.

EXERCICES

6. Montrer que si un ensemble A non vide est globalement invariant par deux symétries centrales distinctes (c'est-à-dire des symétries par rapport à des points de E_2) il l'est par une infinité de symétries centrales et qu'il existe des droites dont l'intersection avec A a une infinité d'éléments.
En déduire qu'une conique non dégénérée a au plus un centre de symétrie, et que si elle en possède un, elle ne peut avoir d'axes de symétrie ne passant pas par son centre.
7. Montrer que les seules normales d'une conique à centre, distincte d'un cercle, passant par son centre sont les normales aux sommets.
En déduire que cela exclut qu'une conique à centre ait d'autres axes de symétrie que ceux qui ont déjà été signalés.
8. Retrouver tous les résultats précédents en cherchant directement par le calcul les isométries admettant une conique à centre donnée comme invariant.

8. 3 HYPERBOLE RAPPORTÉE A SES ASYMPTOTES

Repartons de l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ d'une hyperbole dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $D(O, \vec{j})$ étant l'axe transverse (fig. 4).

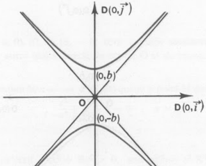


fig. 4

Les asymptotes de cette hyperbole sont les droites d'équations respectives

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad , \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

La première a pour vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, la seconde $\vec{v}$ de coordonnées $(-a, b)$.

Si (X, Y) sont les coordonnées d'un point M dans le repère cartésien $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et (x, y) les coordonnées du même point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a

$$\begin{aligned} x &= Xa - Ya \\ y &= Xb - Yb \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} 2X &= \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \\ 2Y &= -\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \end{aligned}$$

L'hyperbole ayant pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ce qui équivaut à $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$, admet pour équation $XY = \frac{1}{4}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Par rapport à un repère $(O, \vec{k}, \vec{l})$ où $\alpha\vec{k} = \vec{u}$, $\beta\vec{l} = \vec{v}$, l'équation de l'hyperbole serait $XY = \frac{\alpha\beta}{4}$.

Nous concluons :

Théorème.

Par rapport à un repère cartésien $(O, \vec{k}, \vec{l})$ tel qu'elle admette les droites $D(O, \vec{k})$ et $D(O, \vec{l})$ pour asymptotes, une hyperbole a une équation de la forme $XY = m$, où m est un réel non nul.

REMARQUE

Lorsque $a = b$, on dit que l'hyperbole est **équilatère**. Cette propriété est équivalente à l'orthogonalité des asymptotes.

Dans ce cas, le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthogonal, et le repère $\left(O, \frac{\vec{u}}{a\sqrt{2}}, \frac{\vec{v}}{a\sqrt{2}}\right)$ est orthonormé. Dans ce dernier repère l'équation de l'hyperbole équilatère est $XY = \frac{a^2}{2}$.

EXERCICES

1. Étant donné un repère cartésien, on considère les hyperboles H_1 et H_2 d'équations respectives $XY = m_1$ et $XY = m_2$. Déterminer toutes les applications affines de E_2 dans lui-même qui transforment H_1 en H_2.
2. Étant donné un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2, on considère l'hyperbole d'équation $XY = 1$.
Écrire l'équation de la tangente au point M d'abscisse X. Cette tangente rencontre $D(O, \vec{i})$ en P et $D(O, \vec{j})$ en Q. Situer M par rapport au couple (P, Q). Que peut-on dire de l'aire du triangle OPQ quand M décrit l'hyperbole? Ces propriétés permettent-elles de donner des caractérisations de l'hyperbole?

II. Foyers et Directrices

8. 4 ENSEMBLE DES POINTS DONT LE RAPPORT DES DISTANCES A UN POINT ET A UNE DROITE EST CONSTANT.

Nous savons que l'ensemble des points de E_2 dont les coordonnées dans un repère cartésien satisfont une condition du type $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme du second degré, est une conique.
Toute condition géométrique équivalente à une telle condition analytique caractérisera donc une conique.
Il en est ainsi de la condition : « le rapport des distances du point M à un point F et à une droite D a une valeur donnée e » ($e \in \mathbb{R}_+$).
Il est commode, pour exprimer cette condition, de choisir un repère orthonormé $(F, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $D(F, \vec{i})$ soit orthogonale à D.
Si l'équation de D est $x = p$, la distance de $M(x, y)$ à D est $| x - p |$, la distance de M à F est $\sqrt{x^2 + y^2}$, et la condition s'exprime analytiquement par

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e \, | x - p |.$$

Comme deux nombres positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés le sont, la condition est équivalente à

$$x^2 + y^2 = e^2 (x - p)^2$$

ou encore à

$$(1 - e^2) x^2 + y^2 + 2 e^2 px - e^2 p^2 = 0.$$

Elle est bien du type $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme du second degré. C'est donc l'équation d'une conique.
Deux questions se posent : Comment cette conique dépend-elle de e et de p? Toute conique peut-elle être obtenue de cette manière, c'est-à-dire, plus précisément, toute conique est-elle isométrique, pour un choix convenable de e et de p, à une conique d'équation $x^2 + y^2 = e^2 (x - p)^2$.
Nous répondrons à ces deux questions en même temps.

Deux cas de dégénérescence sont évidents : le cas $e = 0$ pour lequel la courbe se réduit à $\{F\}$, et le cas $p = 0$ où elle se réduit à $\{F\}$ si $e < 1$, à la droite $D(F, \vec{i})$ si $e = 1$, et où elle est constituée de deux droites issues de F si $e > 1$.
Écartons ces cas, et examinons d'abord le **cas $e = 1$**. L'équation s'écrit

$$y^2 + 2 px - p^2 = 0,$$

ou encore

$$y^2 + 2p \left(x - \frac{p}{2} \right) = 0.$$

Nous obtenons donc une parabole de paramètre $-p$, et nous voyons que si dans un repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ une parabole a pour équation $Y^2 + 2pX = 0$, et si F est le point $\left(-\frac{p}{2}, 0 \right)$, cette parabole a pour équation $y^2 = 2p \left(x - \frac{p}{2} \right)$ dans le repère $(F, \vec{I}, \vec{J})$.
Par suite toute parabole peut être obtenue de cette manière, et ce d'une unique manière.

Dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$ le sommet de la parabole est le point $\left(\frac{p}{2}, 0 \right)$, et la courbe est située dans celui des demi-plans déterminés par la tangente au sommet $\left(\text{d'équation } x = \frac{p}{2} \right)$ qui contient F (et ne contient pas D).
F est appelé foyer de la parabole, et D directrice de la parabole (fig. 5).

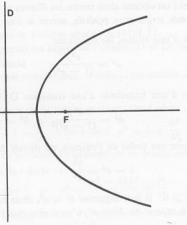


fig. 5

Théorème.

L'ensemble des points de E_2 équidistants d'un point F et d'une droite D, ne contenant pas F, est une parabole.
Il existe pour toute parabole un unique couple (F, D) avec $F \notin D$, tel que la parabole soit l'ensemble des points équidistants de F et de D.

Passons maintenant au **cas $e \neq 1$**.
L'équation

$$(1 - e^2) x^2 + y^2 + 2 e^2 px - e^2 p^2 = 0$$

s'écrit

$$(1 - e^2) \left(x + \frac{e^2 p}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 - e^2 p^2 - \frac{e^4 p^2}{1 - e^2} = 0$$

ou

$$(1 - e^2) \left(x + \frac{e^2 p}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 - \frac{e^2 p^2}{1 - e^2} = 0.$$

Si O est le point $\left(-\frac{e^2 p}{1 - e^2}, 0 \right)$, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe a pour équation, (X, y) étant les coordonnées de M,

$$(1 - e^2) X^2 + y^2 - \frac{e^2 p^2}{1 - e^2} = 0.$$

• Si $e < 1$, on obtient l'ellipse de centre O, d'équation

$$\frac{(1-e^2)^2}{e^2p^2}X^2 + \frac{1-e^2}{e^2p^2}y - 1 = 0.$$

• Si $e > 1$, on obtient l'hyperbole de centre O, d'équation

$$\frac{(1-e^2)^2}{e^2p^2}X^2 - \frac{e^2-1}{e^2p^2}y - 1 = 0 \quad ,$$

qui admet $D(O, \vec{i}) = D(F, \vec{i})$ pour axe transverse.

Pour savoir si l'on obtient ainsi toutes les ellipses et toutes les hyperboles, il faut, a et b étant deux réels strictement positifs, savoir si l'on peut résoudre

• dans le cas d'une ellipse, les équations

$$a^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2p^2}{1-e^2}$$

• dans le cas d'une hyperbole d'axe tranverse $D(O, \vec{i})$, les équations

$$a^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2p^2}{e^2-1}.$$

Dans le premier cas (celui de l'ellipse), on déduit des équations

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{d'où} \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Pour avoir $e^2 \geqslant 0$, il faut supposer $b^2 \leqslant a^2$, mais comme le cas $e = 0$ doit être exclu la condition à retenir est $b^2 < a^2$, c'est-à-dire que l'ellipse ne doit pas être un cercle et que ses sommets situés sur $D(O, \vec{i})$ doivent être strictement plus éloignés de O que les sommets situés sur $D(O, \vec{j})$. Alors, en posant $c^2 = a^2 - b^2$, avec $c > 0$, on obtient

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad p^2 = \frac{(1-e^2)\,b^2}{e^2} = \frac{b^4}{a^2e^2} = \frac{b^4}{c^2},$$

c'est-à-dire

$$p = \frac{b^2}{c} \quad \text{ou} \quad p = -\frac{b^2}{c}.$$

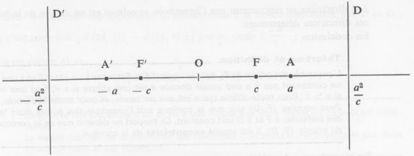
Les abscisses dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des points F correspondants seront $\dfrac{e^2p}{1-e^2} = \dfrac{b^2}{p}$, c'est-à-dire respectivement c et $-c$.

L'équation de la droite D associé au point F d'abscisse c, sera

$$x = c + p = \frac{c^2 + b^2}{c} = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e},$$

celle de la droite associée au point d'abscisse $-c$, sera $-\dfrac{a}{e}$.

Des inégalités $0 < c < a$, on déduit $0 < c < a < \dfrac{a^2}{c}$. En désignant par F (resp. F′) le point $(c, 0)$ (resp. $(-c, 0)$) et par D (resp. D′) la droite d'équation $x = \dfrac{a^2}{c}$ $\left(\text{resp. } x = -\dfrac{a^2}{c}\right)$, on a la disposition indiquée ci-après :



où A et A′ sont les sommets de l'ellipse situés sur $D(O, \vec{i})$.

Les points F et F′ sont appelés les **foyers** de l'ellipse, D et D′ les **directrices** qui leurs sont respectivement associées.

Les directrices ne rencontrent pas l'ellipse, et celle-ci est incluse dans la bande que ces directrices déterminent.

Le cas de l'hyperbole se traite de la même manière. On a alors

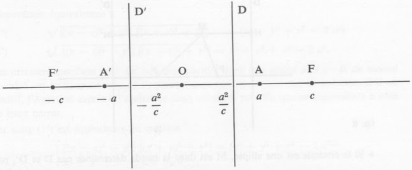
$$e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$

Il n'y a aucune condition de possibilité à imposer, et en posant cette fois $c^2 = a^2 + b^2$, on a

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad p^2 = \frac{(e^2-1)\,b^2}{e^2} = \frac{b^4}{c^2}.$$

A partir de là, les calculs sont les mêmes. On obtient encore deux solutions : le point F de coordonnées $(c, 0)$ associé à la droite D d'équation $x = \dfrac{a^2}{c}$, et le point F′ de coordonnées $(-c, 0)$ associé à la droite D′ d'équation $x = -\dfrac{a^2}{c}$.

Mais, comme on a cette fois $0 < a < c$, on a $0 < \dfrac{a^2}{c} < a < c$, d'où la disposition des points F, F′ et des droites D, D′ :



où A et A′ sont les sommets de l'hyperbole.

F et F′ sont appelés les **foyers** de l'hyperbole, D et D′ les **directrices** qui leurs sont respectivement associées.

Les directrices ne rencontrent pas l'hyperbole, et celle-ci est en dehors de la bande que ces directrices déterminent.
En conclusion :

Théorème et définition.

L'ensemble des points de E_2 dont le rapport des distances à un point F et à une droite D ne contenant pas F a une valeur donnée e est une ellipse si $e < 1$ et une hyperbole si $e > 1$. Pour toute ellipse qui n'est pas un cercle, et pour toute hyperbole, il existe deux couples (F, D) tels que la conique soit l'ensemble des points dont le rapport des distances à F et à D soit constant. Ce rapport ne dépend que de la conique et non du couple (F, D), il est appelé **excentricité** de la conique.

En résumé, on a les résultats suivants :

- Les paraboles sont les coniques d'excentricité 1, elles n'ont qu'un foyer et une directrice.
- Le cas du cercle excepté, les coniques à centre ont une excentricité e différente de 1, qui vérifie $0 < e < 1$ pour les ellipses et $e > 1$ pour les hyperboles.

Elles ont deux couples de foyer et de directrice associée.

REMARQUE

Si l'on considère le cercle comme une ellipse satisfaisant la condition $a = b$, on est conduit à lui accorder une excentricité nulle. Le point $(c, 0)$ est alors le centre du cercle, mais il n'y a pas de directrice associée.

Il est difficile de distinguer à l'œil un cercle d'une ellipse d'excentricité faible (de l'ordre du $\frac{1}{100}$, par exemple).

8. 5 DÉFINITION BIFOCALE DES CONIQUES A CENTRE

Soient F, F′ les foyers et D, D′ les directrices associées d'une conique à centre, d'excentricité e, dont la distance des sommets situés sur la droite (FF′) est $2\,a$.
Soit M un point de la conique et H, H′ ses projections orthogonales respectives sur D et D′ (fig. 6).

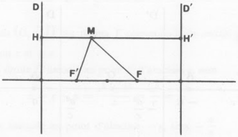


fig. 6

- Si la conique est une ellipse, M est dans la bande déterminée par D et D′, par suite $d\,(\mathrm{M, H}) + d\,(\mathrm{M, H'})$ est égale à la distance de D et de D′, c'est-à-dire à $\frac{2\,a}{e}$. Mais comme on a $d\,(\mathrm{M, F}) = e\,d\,(\mathrm{M, H})$ et $d\,(\mathrm{M, F'}) = e\,d\,(\mathrm{M, H'})$, on en déduit

$$d\,(\mathrm{M, F}) + d\,(\mathrm{M, F'}) = 2\,a.$$

- Si la conique est une hyperbole, M est extérieur à la bande déterminée par D et D′, et c'est cette fois $|\,d\,(\mathrm{M, H}) - d\,(\mathrm{M, H'})\,|$ qui est égale à $\frac{2\,a}{e}$.

On en déduit alors

$$|\,d\,(\mathrm{M, F}) - d\,(\mathrm{M, F'})\,| = 2\,a.$$

Théorème.

La somme des distances d'un point d'une ellipse aux deux foyers de celle-ci est constante.
La valeur absolue de la différence des distances d'un point d'une hyperbole aux deux foyers de celle-ci est constante.

Ce théorème amène les questions : Une ellipse est-elle l'ensemble des points dont la somme des distances à ses foyers a une valeur constante? Une hyperbole est-elle l'ensemble des points dont la valeur absolue des distances à ses foyers est constante?

Nous répondrons affirmativement à ces questions, en déterminant directement les conditions analytiques qui expriment ces conditions géométriques.

F et F′ étant deux points distincts, nous choisissons le repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ où O est le milieu de F et F′, et où $\mathrm{D}\,(\mathrm{O}, \vec{i})$ est la droite (FF′).

Soit c l'abscisse de F (supposée positive), celle de F′ vaut alors $-\,c$.

Les distances du point M (x, y) à F et à F′ sont respectivement

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Si l'on désigne par $2\,a$ la constante des énoncés ci-dessus, les conditions s'écrivent

$$(1) \qquad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2\,a$$

$$(2) \qquad \left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2\,a.$$

Deux nombres positifs étant égaux si et seulement si leurs carrés le sont, (1) et (2) sont respectivement équivalentes à (1′) et (2′) :

$$(1') \qquad x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{[(x-c)^2 + y^2]\,[(x+c)^2 + y^2]} = 2\,a^2$$

$$(2') \qquad x^2 + y^2 + c^2 - \sqrt{[(x-c)^2 + y^2]\,[(x+c)^2 + y^2]} = 2\,a^2$$

elles-mêmes équivalentes à

$$(1'') \qquad \sqrt{[(x-c)^2 + y^2]\,[(x+c)^2 + y^2]} = -\,(x^2 + y^2 + c^2 - 2\,a^2)$$

$$(2'') \qquad \sqrt{[(x-c)^2 + y^2]\,[(x+c)^2 + y^2]} = x^2 + y^2 + c^2 - 2\,a^2.$$

Les premiers membres sont des nombres positifs quels que soient x et y : si un second membre est strictement négatif l'équation correspondante n'a pas de solution. S'il est positif, l'équation exprime l'égalité de deux nombres positifs, qui est équivalente à celle de leurs carrés.

Par suite (1″) est équivalente au système

$$\begin{cases} [(x-c)^2 + y^2]\,[(x+c)^2 + y^2] = (x^2 + y^2 + c^2 - 2\,a^2)^2 \\ x^2 + y^2 + c^2 - 2\,a^2 \leqslant 0 \end{cases}$$

et (2″) est équivalente au système

$$\begin{cases} [(x-c)^2 + y^2]\,[(x+c)^2 + y^2] = (x^2 + y^2 + c^2 - 2\,a^2)^2 \\ x^2 + y^2 + c^2 - 2\,a^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

L'équation qui figure dans les deux systèmes s'écrit

$$(x^2 + y^2 + c^2 - 2\,cx)\,(x^2 + y^2 + c^2 + 2\,cx) = (x^2 + y^2 + c^2 - 2\,a^2)^2$$

soit $$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4\,c^2x^2 = (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4\,a^2\,(x^2 + y^2 + c^2) + 4\,a^4$$

soit encore $$a^2\,(x^2 + y^2 + c^2) = c^2x^2 + a^4$$

ou enfin $$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 - a^2\,(a^2 - c^2) = 0.$$

L'équation de chaque système s'écrivant

$$x^2 + y^2 + c^2 = \frac{c^2}{a^2} + a^2\,x^2$$

les inéquations peuvent être respectivement remplacées par

$$c^2x^2 \leqslant a^4 \quad \text{et} \quad c^2x^2 \geqslant a^4.$$

Finalement (1) est équivalente à

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} (a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 - a^2\,(a^2 - c^2) = 0 \\ c^2x^2 \leqslant a^4 \end{cases}$$

et (2) est équivalente à

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 - a^2\,(a^2 - c^2) = 0 \\ c^2x^2 \geqslant a^4. \end{cases}$$

Étudions (I).

- Si $a = c$ le système se réduit à $y = 0$, $x^2 < a^2$. On obtient le segment [A'A] où A' et A sont les points de $D\left(O, \vec{i}\right)$ d'abscisses $-a$ et a.
- Si $a < c$, les solutions de l'équation vérifient $x^2 - a^2 \geqslant 0$, et celles de l'inéquation $x^2 < a^2$, ce qui est incompatible et il n'y a pas de solution.
- Si $a > c$, les solutions de l'équation vérifient $x^2 - a^2 \leqslant 0$, c'est-à-dire $x^2 \leqslant a^2$ qui implique $c^2x^2 \leqslant a^4$. (I) est équivalent à l'équation que l'on peut écrire, en posant $a^2 - c^2 = b^2$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Étudions (II).

- Si $a = c$, le système se réduit à $y = 0$, $x^2 > a^2$. On obtient deux demi-droites.
- Si $a > c$, les solutions de l'équation vérifient $x^2 - a^2 \leqslant 0$ et celles de l'inéquation $x^2 > a^2$, ce qui est incompatible et il n'y a pas de solution.
- Si $a < c$, les solutions de l'équation vérifient $x^2 - a^2 \geqslant 0$, ce qui implique alors $c^2x^2 \geqslant a^4$, et (II) est équivalent à l'équation, que l'on peut écrire en posant $c^2 - a^2 = b^2$,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Concluons :

Théorème.

L'ensemble des points de E_2 dont la somme des distances à deux points F et F' est constante, est une ellipse ayant F et F' pour foyers.
L'ensemble des points de E_2 dont la valeur absolue de la différence des distances à deux points F et F' est constante est une hyperbole ayant F et F' pour foyers.

REMARQUE

Si F = F' le premier ensemble est un cercle de centre F; quant au second il est vide si la constante n'est pas nulle, et il est égal à E_2 si elle est nulle.

EXERCICES

1. Reprendre la recherche des équations des lieux précédents, en remarquant a priori que l'inégalité triangulaire impose que (1) n'ait de solution que si $a \geqslant c$, et que (2) n'en ait que si $a \leqslant c$.
2. F et F' étant deux points distincts, déterminer l'ensemble des points M tels que $d\,(M, F) - d\,(M, F') = 2\,a$, ou $d\,(M, F) - d\,(M, F') = -2\,a$.
3. Deux sources lumineuses placées en deux points distincts F et F' émettent en phase une lumière monochromatique de longueur d'onde λ. Déterminer dans un plan passant par F et F', l'ensemble des points où l'intensité lumineuse est nulle.

8. 6 UNE PROPRIÉTÉ REMARQUABLE DES TANGENTES AUX CONIQUES

Nous avons vu au § 8.2 que l'on peut considérer sur une conique un ou plusieurs arcs, pour chacun desquels le point de la conique est déterminé par son abscisse (dans le repère correspondant à une équation réduite), et nous avons vu que dans chacun des cas l'ordonnée était la valeur d'une application admettant une dérivée continue.

Considérons, par exemple, le cas d'une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, avec $a > b$, et sur cette ellipse l'arc dont les points M ont pour coordonnées

$$\left(x, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)$$

avec $-a \leqslant x \leqslant a$.

Si F est le foyer $(c, 0)$, le vecteur $\overrightarrow{FM}$ a pour coordonnées

$$\left(x - c, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right).$$

Son module $\|\overrightarrow{FM}\|$ vaut $\sqrt{(x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ et l'application $x \longmapsto \|\overrightarrow{FM}\|$ a une dérivée continue.

De même le vecteur unitaire $\vec{u}\,(x)$ défini par $\overrightarrow{FM} = \|\overrightarrow{FM}\|\,\vec{u}\,(x)$ a pour coordonnées

$$\frac{x - c}{\sqrt{(x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}}\,,\quad \frac{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{\sqrt{(x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}}$$

et l'application $x \longmapsto \vec{u}\,(x)$ admet une dérivée continue.

Si nous posons $\|\overrightarrow{FM}\| = \rho\,(x)$, nous avons $\overrightarrow{FM} = \rho\,(x)\,\vec{u}\,(x)$, et les deux applications $x \longmapsto \rho\,(x)$ et $x \longmapsto \vec{u}\,(x)$ ont des dérivées continues.

On en déduit (cf. tome II, § 4.7 a) que l'application $x \longmapsto \overrightarrow{FM}$ est dérivable et a pour dérivée au point x

$$\frac{d\overrightarrow{FM}}{dx} = \rho(x)\,\frac{d\vec{u}(x)}{dx} + \frac{d\rho(x)}{dx}\,\vec{u}(x).$$

Or $\vec{u}(x)$ étant unitaire, on a $\vec{u}(x)\cdot\dfrac{d\vec{u}(x)}{dx} = 0$ (cf. tome II, § 4.7 a) et par suite

$$\vec{u}(x)\cdot\frac{d\overrightarrow{FM}}{dx} = \frac{d\rho(x)}{dx}.$$

Si F′ est l'autre foyer, et si l'on pose $\rho'(x) = \|\overrightarrow{F'M}\|$ et $\vec{u}'(x) = \dfrac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|}$, on aura de même

$$\vec{u}'(x)\cdot\frac{d\overrightarrow{F'M}}{dx} = \frac{d\rho'(x)}{dx}.$$

Or d'une part, de $\overrightarrow{F'M} = \overrightarrow{F'F} + \overrightarrow{FM}$ on déduit $\dfrac{d\overrightarrow{F'M}}{dx} = \dfrac{d\overrightarrow{FM}}{dx}$ et ce vecteur que nous désignerons par $\vec{v}$ a pour support la tangente en M à l'ellipse, d'autre part en tout point de l'ellipse on a $\rho(x) + \rho'(x) = 2a$ et par suite

$$\frac{d\rho(x)}{dx} + \frac{d\rho'(x)}{dx} = 0.$$

On en déduit

$$\vec{u}(x).\vec{v} + \vec{u}'(x).\vec{v} = 0.$$

EXERCICE

1. Étant donnés deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ de $\mathcal{E}_2$, montrer qu'un vecteur non nul $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite vectorielle bissectrice des demi-droites vectorielles déterminée par $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ si et seulement si
$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}'.\vec{v}.$$

Ce résultat entraîne que la tangente en M (de vecteur directeur $\vec{v}$) est la bissectrice des demi-droites d'origine M et de vecteurs directeurs $\vec{u}(x)$ et $-\vec{u}'(x)$, résultat que nous pouvons encore énoncer sous la forme suivante :

Théorème.

La tangente à une ellipse de foyers F et F′ en un point M est la bissectrice des demi-droites d'origine M et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{MF'}$.

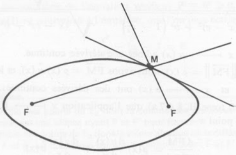


fig. 7

EXERCICES

2. Démontrer de la même manière que si M décrit une hyperbole de foyers F et F′, la tangente en M est la bissectrice des demi-droites d'origine M et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{F'M}$.

3. P étant la parabole d'équation $y^2 - 2px = 0$, avec $p > 0$, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, F en étant le foyer, et en posant pour tout point M de P, $\overrightarrow{FM} = \|\overrightarrow{FM}\|\,\vec{u}(M)$, montrer que la tangente en M à P est la bissectrice des demi-droites d'origine M et de vecteurs directeurs $\vec{u}(M)$ et $\vec{i}$.

4. Quel est l'ensemble des symétriques d'un foyer d'une conique par rapport aux tangentes à cette conique. En déduire l'ensemble des projections d'un foyer sur les tangentes à la conique.

III. Quelques propriétés du cercle et de l'ellipse

8. 7 ÉQUATION GÉNÉRALE DU CERCLE

Étant donné un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2, un point I (a, b) de E_2 et un réel positif r, le cercle S (I, r) de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $d(I, M) = r$. L'égalité de deux nombres positifs étant équivalente à celle de leurs carrés, cette condition est équivalente à

$$d(I, M)^2 = r^2$$

qui s'écrit, si (x, y) sont les coordonnées de M,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ou encore

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Cette relation est appelée **équation du cercle** S (I, r) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Le premier membre est un polynôme du second degré, dont le terme en xy a un coefficient nul, les termes en x^2 et y^2 des coefficients égaux, et dont le coefficient constant est au plus égal à $a^2 + b^2$, somme des carrés des coefficients de $2x$ et $2y$.
Réciproquement, considérons l'ensemble des points M de E_2 dont les coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ vérifient une relation du type

$$k(x^2 + y^2) + 2Ax + 2By + C = 0.$$

• Si $k = 0$, l'équation est celle d'une droite, sauf si $A = B = 0$ auquel cas l'ensemble est vide lorsque $C \neq 0$ et est égal à E_2 lorsque $C = 0$.

• Si $k \neq 0$, on peut poser $\dfrac{A}{k} = -a$, $\dfrac{B}{k} = -b$, $\dfrac{C}{k} = c$ et la relation donnée est équivalente à

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

c'est-à-dire à $\qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + c - a^2 - b^2 = 0.$

Si $c - a^2 - b^2 > 0$, l'ensemble des points de E_2 définis par cette relation est vide.

Si $c - a^2 - b^2 \leqslant 0$, on peut poser $r^2 = a^2 + b^2 - c$, et la relation s'écrit

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Elle est vérifiée par les points du cercle de centre (a, b) et de rayon r, et par eux seulement.

Théorème.

L'ensemble des points de E_2 dont les coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé vérifient la relation

$$k(x^2 + y^2) + 2\,Ax + 2\,By + C = 0$$

est un cercle si et seulement si $k \neq 0$, $C - \left(\frac{A}{k}\right)^2 - \left(\frac{B}{k}\right)^2 \leqslant 0$. Le centre du cercle est alors le point $\left(-\frac{A}{k}, -\frac{B}{k}\right)$ et le rayon est $\sqrt{\frac{A^2+B^2}{k^2} - C}$.

EXERCICE

(i) On considère le cercle S (I, r) d'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et une droite Δ contenant O de vecteur directeur unitaire $\vec{u}$. Si Δ rencontre S (I, r) aux points M et M′, montrer que le produit $\overline{OM}.\overline{OM'}$ des mesures algébriques des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ par rapport à $\vec{u}$ ne dépend pas de Δ. Déterminer sa valeur, que l'on appelle **puissance** du point O par rapport au cercle S (I, r). Calculer la puissance du point A (x_0, y_0) par rapport à S (I, r).

(ii) Étant donnés les cercles S (I, r) et S (I′, r'), quel est l'ensemble des points qui ont même puissance par rapport aux deux cercles.
Si cet ensemble n'est pas vide, c'est une droite que l'on appelle **l'axe radical** des deux cercles.

(iii) Étant donnés un cercle S (I, r) et une droite D, déterminer l'ensemble des cercles S (J, ρ) tels que D soit l'axe radical de S (I, r) et de S (J, ρ).

8. 8 CERCLE ET ELLIPSE CONCENTRIQUES

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé dont l'origine O est le centre d'un cercle C et d'une ellipse E, et tel que D $(O, \vec{i})$ et D $(O, \vec{j})$ soient les axes de symétrie de l'ellipse.

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ellipse E a une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, et le cercle C a une équation de la forme $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Une transformation affine simple permet de passer de C à E.

Considérons en effet, l'application qui au point (x, y) associe le point (X, Y) tel que

$$X = \frac{ax}{r},\ Y = \frac{by}{r}.$$

On a $x = \frac{rX}{a}$, $y = \frac{rY}{b}$, et par suite la relation $x^2 = y^2 = r^2$ est équivalente à la relation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Il résulte de cette remarque que *les propriétés du cercle qui sont conservées par une transformation affine sont des propriétés de l'ellipse.*

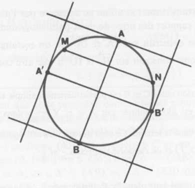


fig. 8

Si l'on considère, par exemple, toutes les droites de direction donnée δ, qui rencontrent le cercle C en deux points M et N, distincts ou confondus, le milieu de M et de N décrit le segment [A, B], A et B étant les points de contacts des tangentes à C de direction δ. La direction δ' de la droite (AB) est orthogonale à δ et si l'on pose le même problème avec δ', on obtient le segment [A′, B′], la droite (A′B′) ayant pour direction δ (fig. 8).
Une transformation affine ne conserve pas l'orthogonalité des droites, mais elle conserve le parallélisme, elle conserve le barycentre et en particulier le milieu de deux points. Elle conserve aussi le contact d'une droite et d'une courbe.
On peut donc conclure (fig. 9) :

Étant donnée une droite Δ de $\mathcal{E}_2$, une ellipse E a deux tangentes de direction Δ, et si U et V sont les points de contacts de E et de ces tangentes, l'ensemble des milieux des points P et Q de E tels que la droite (PQ) soit de direction Δ, est le segment [U, V]. Si Δ' est la direction de la droite (UV), l'ensemble des milieux des points P′ et Q′ de E tels que la droite (P′Q′) soit de direction Δ', est un segment [U′, V′], la droite (U′V′) ayant pour direction Δ.

En particulier, si Δ est la direction de D $(O, \vec{i})$, Δ' est celle de D $(O, \vec{j})$.

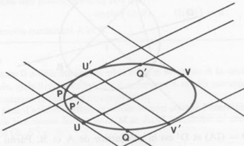


fig. 9

De même une transformation affine ne conserve pas l'aire d'un parallélogramme, mais elle conserve le rapport des aires de deux parallélogrammes. Comme lorsque δ varie, le parallélogramme construit sur $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IA'}$ est un rectangle d'aire constante égale à r^2, le parallélogramme construit sur $\overrightarrow{IU}$ et $\overrightarrow{IU'}$ a une aire constante (dont la valeur est ab).

REMARQUE

La relation entre C et E est particulièrement simple si $r = a$ ou $r = b$, puisque l'application est alors donnée par $X = x$, $Y = \frac{b}{a}y$ dans le premier cas, et par $X = \frac{a}{b}x$, $Y = y$ dans le second. Ce sont des affinités orthogonales de bases respectives $D(O, \vec{i})$ et $D(O, \vec{j})$ et de rapports respectifs $\frac{b}{a}$ et $\frac{a}{b}$.

EXERCICE

Étant donnés deux plans P_1, P_2 distincts de E_3, d'angle φ, se coupant selon une droite D, on considère dans P_1 un cercle C_1 de centre I appartenant à D et de rayon r.
Quelle est la projection orthogonale C_2 de C_1 sur P_2? Quelle est la projection orthogonale de C_2 sur P_1?

8. 9 UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES POINTS D'UN CERCLE

Soit C un cercle de centre I, de rayon strictement positif, et soient A et B deux points distincts de C (fig. 10).
Il existe une et une seule rotation de centre I telle que B soit l'image de A; soit α son angle.
On sait que cette rotation est la composée $s_{D'} \circ s_D$ de deux symétries orthogonales par rapport à des droites D et D' contenant I et assujetties à la seule condition : angle $(D, D') = \dot{\beta}$ où $\dot{\beta}$ est tel que pour tout représentant β de $\dot{\beta}$ on ait $\beta + \beta = \alpha$ (autrement dit $\mu(\dot{\beta}) = \alpha$).
Si $M = s_D(A)$, on a $s_{D'}(M) = B$. Si M est distinct de A et de B, les droites D et D' sont les médiatrices respectives de A et M, et de M et B; par suite D (resp. D') est orthogonale à (AM) (resp. (MB)), ce qui implique

$$\text{angle}\,((AM), (MB)) = \text{angle}\,(D, D') = \dot{\beta}.$$

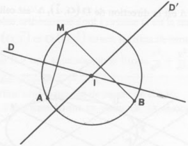


fig. 10

Si $M = A$, $D = (IA)$ et D' est la médiatrice de A et B. Parmi les droites contenant M (= A), il en est une orthogonale à (IA) : c'est la tangente en A au cercle C.
La situation est analogue si M = B.
Si l'on convient de prendre pour (AM) (resp. (BM)) la tangente au cercle C en A (resp. B) lorsque M = A (resp. M = B), on peut énoncer :

Pour tout point M du cercle C on a

$$\text{angle}\,((AM)\ ,\ (BM)) = \dot{\beta}$$

où pour tout représentant β de $\dot{\beta}$, on a

$$\beta + \beta = \text{angle}\,(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}).$$

Montrons maintenant que cette propriété caractérise les points du cercle C.
Il suffit, à cet effet, de remarquer que si Δ est une droite contenant A, il existe une droite Δ' et une seule, contenant B et telle que angle $(\Delta, \Delta') = \dot{\beta}$, et que si Δ n'est ni la tangente en A au cercle C, ni la droite (AB) elle rencontre C en un autre point M distinct de A et B et tel que angle $(\Delta, (MB)) = \dot{\beta}$. On a donc $\Delta' = (MB)$.
Si Δ est la tangente en A, on a $\Delta' = (AB)$, et si $\Delta = (AB)$ alors Δ' est la tangente en B.
Avec les conventions déjà faites (remplacement de (AM) par la tangente en A au cercle si M = A, et remplacement de (BM) par la tangente en B au cercle si M = B), on peut énoncer :

Théorème.
Étant donnés un cercle C et deux points distincts A et B de C, il existe un angle de droites et un seul $\dot{\beta}$, tel que

$$\text{angle}\,((AM)\ ,\ (BM)) = \dot{\beta}$$

soit une propriété caractéristique des points de C.

La question se pose alors de savoir quelles valeurs peut prendre $\dot{\beta}$.
L'hypothèse $A \neq B$ exclut que l'angle α soit l'angle nul ω, donc que $\dot{\beta}$ soit l'angle nul $\dot{\omega}$.
Considérons donc un élément $\dot{\beta}$ de $\mathcal{A}'$ non nul. Si δ est la médiatrice de A et B, l'existence d'un point I de δ tel que pour tout point M du cercle de centre I contenant A et B on ait angle $((AM), (BM)) = \dot{\beta}$, est équivalente à l'existence d'un point I de δ tel que angle $((AI), \delta) = \dot{\beta}$.
Or il existe exactement une droite δ' contenant A telle que angle $(\delta', \delta) = \dot{\beta}$ et cette droite δ' rencontre δ si $\dot{\beta} \neq \dot{\omega}$.
Nous pouvons conclure :

Théorème.
Pour tout élément non nul $\dot{\beta}$ de $\mathcal{A}'$ et pour tout couple (A, B) de points distincts de E_2, l'ensemble des points M de E_2 tels que

$$\text{angle}\,((AM)\ ,\ (BM)) = \dot{\beta}$$

est un cercle contenant A et B.

REMARQUE 1

Comme il a déjà été signalé plus haut, si M est en A la droite (AM) n'est pas déterminée, mais il existe une droite Δ contenant A et telle que angle $(\Delta, (AB)) = \dot{\beta}$, et Δ est précisément la tangente au cercle en A.
On peut d'ailleurs définir le cercle obtenu comme l'ensemble des points M tels qu'il existe une droite Δ contenant M et A, et une droite Δ' contenant M et B, vérifiant angle $(\Delta, \Delta') = \dot{\beta}$.

REMARQUE 2

Si l'on oriente E_2 par un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{AB} = 2a\vec{i}$, et si β est un représentant de $\dot{\beta}$, la droite (AI) est déduite de la droite $D(A, \vec{j})$ par la rotation de centre A et d'angle $-\beta$.

Le vecteur déduit de $\vec{j}$ par cette rotation a pour coordonnées (Sin β, Cos β) dans la base orthonormée directe $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Il en résulte que les coordonnées de I dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ sont $(a, a \text{ Cotg } \beta)$. On remarque qu'elles dépendent bien de β et non du représentant choisi.

REMARQUE 3

Si $\beta = \dot{\omega}$, l'ensemble des points M tels qu'il existe une droite Δ contenant M et A, et une droite Δ′ contenant M et B vérifiant angle $(\Delta, \Delta') = \dot{\omega}$ est la droite (AB).

EXERCICE

Retrouver par voie analytique le théorème précédent. On pourra utiliser le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ introduit dans la remarque 2 et écrire que l'image du vecteur $\overrightarrow{MA}$ par la rotation de centre M et d'angle β et le vecteur $\overrightarrow{MB}$ sont linéairement dépendants.

8.10 ENSEMBLE DES POINTS M TELS QUE angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ AIT UNE VALEUR DONNÉE α

Si l'angle des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ vaut α, l'angle des droites (MA) et (MB) est $\dot{\alpha}$ classe de α dans $\mathcal{A}'$; par suite, pour $\alpha \neq \omega$ et $\alpha \neq \varpi$ l'ensemble cherché est une partie du cercle obtenu au paragraphe précédent pour le couple (A, B) de points distincts et l'angle de droites $\dot{\alpha}$.

Or, les angles α et $\alpha + \varpi$ ont, lorsque $\mathcal{E}_2$ est orienté, des Cosinus et des Sinus respectivement opposés, mais Cos α peut être nul, tandis que Sin α ne peut l'être puisque les cas $\alpha = \omega$ et $\alpha = \varpi$ sont exclus pour le moment. On utilisera donc le signe de Sin α pour distinguer les points du cercle correspondant à α de ceux correspondant à $\alpha + \varpi$. A cet effet, nous orientons E_2 par le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OA} = -a\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = a\vec{i}$ (fig. 11).

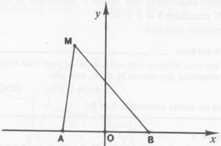


fig. 11

Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont pour coordonnées respectives

$$(-a-x, -y) \quad , \quad (a-x, -y).$$

Le Sinus de angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ a le signe de $(a+x)\,y + y\,(a-x)$ (cf. § 5.5 c), c'est-à-dire le signe de y.

Donc si Sin $\alpha > 0$, les points du cercle situés dans le demi-plan $y > 0$ répondent à la question; si Sin $\alpha < 0$, ce sont ceux qui sont situés dans le demi-plan $y < 0$ qui conviennent.

Que peut-on dire des points A et B?

Si M est en A, le vecteur $\overrightarrow{MA}$ est nul, son angle avec $\overrightarrow{AB}$ est indéterminé, cependant il existe une demi-droite vectorielle D d'origine A telle que angle $(D, \overrightarrow{AB}) = \alpha$; cette demi-droite D est contenue dans la tangente en A au cercle et est située dans le demi-plan

$$y \text{ Sin } \alpha \leqslant 0.$$

On a un résultat analogue pour B.

En conclusion :

Théorème.

Étant donnés deux points distincts A et B du plan euclidien orienté E_2 et un angle de demi-droites vectorielles α, différent de ω et de ϖ, l'ensemble des points M tels qu'il existe deux demi-droites d'origine M contenant respectivement A et B et dont l'angle vaille α est un arc du cercle C défini par (A, B) et $\dot{\alpha}$. Dans le repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$, cet arc est l'ensemble des points de C situés dans le demi-plan y Sin $\alpha \geqslant 0$.

REMARQUE

- Si $\alpha = \omega$, l'ensemble des points M tels qu'une demi-droite d'origine M contenant A soit confondue avec une demi-droite d'origine M contenant B est la réunion de deux demi-droites de (AB) : la demi-droite d'origine A ne contenant pas B, et la demi-droite d'origine B ne contenant pas A.
- Si $\alpha = \varpi$, l'ensemble des points M tels qu'une demi-droite d'origine M contenant A soit symétrique par rapport à M d'une demi-droite d'origine M contenant B est le segment [A, B].

EXERCICE

Un couple de points distincts (A, B) du plan euclidien orienté E_2 étant donné, déterminer l'ensemble des points M tels que la valeur absolue du Cosinus de l'angle α des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ait une valeur donnée.

Distinguer dans cet ensemble les parties pour lesquelles Cos α et Sin α ont chacun un signe donné.

(On peut utiliser les résultats de la présente section, ou traiter directement le problème analytiquement.)

EXERCICES

8.1 On considère dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2 la conique Γ d'équation

$$2x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0.$$

Déterminer un repère orthonormé dans lequel Γ a une équation de la forme

$$aX^2 + bY^2 + 2cX + 2dY + e = 0,$$

que l'on précisera.

8.2 On considère dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2 la parabole P d'équation $y^2 - 4x - 1 = 0$. Déterminer l'axe, le foyer et la directrice de P. Représenter graphiquement P.

8.3 Mêmes questions pour la parabole d'équation

$$2x^2 - 4x + y - 1 = 0.$$

8.4 On considère dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2 l'ellipse E d'équation

$$2x^2 + y^2 - x + 2y + 1 = 0.$$

Déterminer ses axes, ses foyers, les directrices associées et son excentricité. Représenter graphiquement E.

8.5 Mêmes questions pour l'ellipse d'équation

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0.$$

8.6 On considère dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2 l'hyperbole H d'équation

$$x^2 - 9y^2 - 2x + 36y - 44 = 0.$$

Déterminer ses axes, ses foyers et leurs directrices, et son excentricité. Représenter graphiquement H.

8.7 Mêmes questions pour l'hyperbole d'équation

$$4x^2 - y^2 + 8x + 6y - 1 = 0.$$

8.8 On considère la conique d'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

dans un repère orthonormé de E_2. Montrer que cette conique est une hyperbole équilatère si et seulement si $A + C = 0$.

8.9 Étant donné un repère orthonormé de E_2 on considère la famille des coniques C_λ d'équation

$$x^2 + \lambda y^2 - \lambda x - y = 0$$

où λ décrit $\mathbb{R}$.

1° Quelle est la nature de C_λ? Y a-t-il des hyperboles équilatères dans la famille $(C_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

2° Représenter graphiquement les coniques C_λ pour

$$\lambda = -2, \quad \lambda = -1, \quad \lambda = 0, \quad \lambda = 1.$$

3° Déterminer les points communs à toutes les coniques C_λ.

4° Lorsque C_λ est une conique à centre déterminer les coordonnées de son centre. Quel est l'ensemble des centres de ces coniques?

8.10 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de E_2.
On considère la famille des courbes C_λ d'équation

$$(1 + \lambda)x^2 - (1 + \lambda)y^2 + 2x + \lambda y + \lambda - 1 = 0 \quad ,$$

où λ décrit $\mathbb{R}$.

1° Quelle est la nature de C_λ?

2° Déterminer les points communs aux courbes C_λ.

3° Déterminer le centre Ω_λ de C_λ et l'ensemble de ces centres lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.

8.11 Soient D et D' deux droites non parallèles de E_2, O leur point commun, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs unitaires directeurs des bissectrices de D et D'.

Déterminer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des points M tels que

a) $d(M, D)^2 + d(M, D')^2 = a$
b) $|d(M, D)^2 - d(M, D')^2| = a$
c) $d(M, D)^2 - d(M, D')^2 = a.$

8.12 Construction d'une ellipse par la méthode de la bande de papier.

Soient D_1 et D_2 deux droites orthogonales du plan affine euclidien E_2.
On considère les couples (A_1, A_2) de $D_1 \times D_2$ tels que $d(A_1, A_2) = l$ où l est un réel positif donné.
Montrer que l'ensemble des points M appartenant aux droites (A_1A_2) tels que $d(A_1, M)$ et $d(A_2, M)$ aient des valeurs données a_1 et a_2, est une ellipse dont D_1 et D_2 sont les axes de symétrie. Toute ellipse peut-elle être obtenue ainsi, moyennant un choix convenable de a_1, a_2, l? Caractériser l'ensemble des ellipses obtenues pour une valeur donnée de l.

8.13 1° Déterminer le nombre de points communs à la parabole d'équation $y^2 - 2px = 0$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et à la droite d'équation $y = \lambda x + a$, suivant les valeurs de λ et de a.

2° Déterminer le nombre de points communs à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_2} - 1 = 0$ (resp. à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$) et à la droite d'équation $y = \lambda \frac{a}{b} x + pb$, suivant les valeurs de λ et de a.

8.14 Montrer que l'image d'une conique non dégénérée par une application affine bijective du plan affine euclidien E_2 sur lui-même est une conique non dégénérée.
Montrer que dans une telle transformation, une ellipse a pour image une ellipse, une hyperbole a pour image une hyperbole, une parabole a pour image une parabole.
(Indications : on pourra procéder de plusieurs manières différentes :
a) remarquer que la discussion du nombre de points d'intersection d'une droite et d'une conique fait apparaître des propriétés caractéristiques des ellipses, hyperboles, paraboles;
b) remarquer qu'une application affine bijective transforme un demi-plan en un demi-plan, une bande en une bande.)

8.15 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2 soit M (x, y) un point de la conique de foyer O, d'excentricité e, ayant pour directrice la droite D d'équation $x = p$.
Déterminer en fonction de x, y, p l'ordonnée du point Q où la tangente à la conique en M rencontre D. Que peut-on dire des deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OQ}$? Si M et M' sont deux points de la conique alignés avec O, quel est le point d'intersection des tangentes en M et en M'?

8.16 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de E_2.
Quel est l'ensemble des points appartenant à deux tangentes orthogonales à

• l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

• l'hyperbole d'équation $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$

8.17 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de E_2.
1° Montrer que la courbe représentée paramétriquement par

$$x = a \operatorname{Cos} \varphi \qquad y = b \operatorname{Sin} \varphi \quad \text{où} \quad \varphi \in \mathcal{A}$$

est une ellipse E.

2° Soit $\dot{\varphi} \in \mathcal{A}'$. On considère l'ensemble des couples (M_1, M_2) de points de E tels que l'angle de $D(O, \vec{i})$ et de la droite (M_1M_2) soit $\dot{\varphi}$.
On a vu dans le cours que l'ensemble des milieux des points M_1 et M_2 est un segment d'extrémités P et Q appartenant à E. Montrer que l'angle de $D(O, \vec{i})$ et de (PQ) est $\dot{\varphi} + \dot{\delta}_+$. (On utilisera l'affinité d'axe $D(O, \vec{i})$ de direction $\vec{j}$ et de rapport $\frac{a}{b}$).

8.18 Le réel θ décrivant le segment $[0, 2\pi]$, que décrit le point M dont les coordonnées dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2 sont $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, où a et b sont deux réels positifs.
Utiliser cette représentation paramétrique pour retrouver que la tangente en M d'une ellipse de foyers F et F' est la bissectrice des demi-droites d'origines F et F' et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{MF'}$.

8.19 Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2, on considère l'ellipse E d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Quelle est l'aire de la partie de E_2 constituée des points M (x, y) tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqslant 0$.

(Indication : on utilisera l'affinité orthogonale d'axe $D(O, \vec{i})$ et de rapport $\frac{a}{b}$ et le fait que pour toute partie quarrable Δ de E_2 on a $\quad \mathcal{A}(f(\Delta)) = \frac{a}{b} \mathcal{A}(\Delta) \quad$ (cf. exercice 6.55)).

8.20 Montrer que si A, B, C sont trois points non alignés de E_2 il existe un cercle et un seul contenant ces trois points.

8.21 Soient A, B, C trois points non alignés de E_2.
Montrer que le cercle contenant A, B, C est l'ensemble des points de E_2 dont les projections orthogonales sur (BC), (CA), (AB) sont alignés.

8.22 Soient A, B, C trois points distincts d'un cercle Γ de E_2, et H l'orthocentre du triangle ABC.
Montrer que l'image de H par la symétrie orthogonale par rapport à (BC) appartient à Γ.

8.23 Étant donnés deux points A et B distincts de E_2, quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB} = k$ où k est un réel donné.

8.24 On considère six points A, B, C, A', B', C' du plan affine euclidien E_2 et six réels $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$.
Quel est l'ensemble des points M de E_2 tels que

$$(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}).(\alpha'\overrightarrow{MA'} + \beta'\overrightarrow{MB'} + \gamma'\overrightarrow{MC'}) = k \ ,$$

où k est un réel donné.

8.25 Étant donnés deux points distincts A et B de E_2, déterminer l'ensemble C_k des points M de E_2 tels que $d(A, M) = k d(M, B)$, où k est un réel positif donné.
Étudier l'ensemble des courbes C_k lorsque k décrit $\mathbb{R}_+$.

8.26 Soient C et C' deux cercles de E_2.
Montrer qu'il existe une infinité de similitudes f telles que $f(C) = C'$.
Quel est l'ensemble des centres de ces similitudes?

8.27 Soit C un cercle de E_2 et C' l'image de C par une isométrie f de E_2, distincte de l'identité. Quels sont les éléments du groupe des isométries de $C \cup C'$.

8.28 Soient C_1 et C_2 deux cercles de E_2 de centres O_1, O_2 et de rayons R_1, R_2.
1° Montrer que $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$ si et seulement si

$$|R_1 - R_2| \leqslant d(O_1, O_2) \leqslant R_1 + R_2.$$

2° Montrer que C_1 et C_2 sont tangents si et seulement si on a

$$d(O_1, O_2) = |R_1 - R_2| \quad \text{ou} \quad d(O_1, O_2) = R_1 + R_2.$$

Lorsque $\quad d(O_1, O_2) = |R_1 - R_2| \quad$ (resp. $R_1 + R_2$)
on dit que les cercles sont trangents intérieurement (resp. extérieurement).

8.29 Soient C_1 et C_2 deux cercles de E_2 et D une droite vectorielle de $\mathcal{E}_2$.
Existe-t-il des droites Δ de E_2, de direction D, rencontrant C_1 (resp. C_2) en des points A_1, A_1' (resp. A_2, A_2') tels que $d(A_1, A_1') = d(A_2, A_2')$.

8.30 Soient A, B, C trois points non alignés de E_2.
On considère sur (BC), (CA), (AB) des points A', B', C' tous distincts de A, B, C.
On note $\quad \alpha$ le cercle contenant A, B', C'
$\quad \beta$ le cercle contenant B, C', A'
$\quad \gamma$ le cercle contenant C, A', B'.

Montrer que les cercles α, β, γ ont un point commun.

8.31 Soient A, B, C trois points non alignés de E_2 et A' le milieu de B et C, B' le milieu de C et A, C' le milieu de A et B.
On note D_a, D_b, D_c les droites contenant respectivement A', B', C' et telles que

$$\text{angle}((BC), D_a) = \text{angle}((CA), D_b) = \text{angle}((AB), D_c) = \dot{\varphi}$$

où $\dot{\varphi}$ est un élément de $\mathcal{A}'$ donné.
1° Soient $\quad \{\alpha\} = D_b \cap D_c \ , \quad \{\beta\} = D_c \cap D_a \ , \quad \{\gamma\} = D_a \cap D_b.$
Quel est l'ensemble des points α (resp. β, γ) lorsque $\dot{\varphi}$ décrit $\mathcal{A}'$.
2° Montrer que les triangles ABC et $\alpha\beta\gamma$ sont semblables. Quel est le rapport de la similitude.
3° Les points α, β, γ, A, B, C appartiennent à un même cercle.

8.32 Soient A, B, C trois points non alignés de E_2 et
A' la projection orthogonale de A sur (BC),
B' la projection orthogonale de B sur (CA),
C' la projection orthogonale de C sur (AB).
Montrer que la droite (AA') est bissectrice des droites (A'C') et (A'B').

8.33 Soient A et B les points d'intersection de deux cercles C, C' de centres O, O'.
Étant donné un point M de C, on note M' le point de C' tel que

$$\text{angle}(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'M'}) = \text{angle}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}).$$

1° Montrer que les triangles AMM' et AOO' sont directement semblables.
2° Montrer que la droite (MM') contient B.

8.34 Soient A et B deux points distincts du plan affine euclidien orienté E_2.
On note r la rotation de centre A et d'angle δ_+. Déterminer l'ensemble des points M de E_2 tels que $r(M)$ appartienne à la droite (MB).

8.35 Soient O_1 et O_2 deux points de E_2.
On considère deux rotations r_1 et r_2 de centres O_1 et O_2 et d'angles φ_1 et φ_2.

Si M est un point de E_2 on note

$$M_1 = r_1(M) \quad \text{et} \quad M_2 = r_2(M).$$

Quel est l'ensemble des points M tels que $d(M_1, M_2) = \lambda$ où λ est un réel positif donné.

8.36 Centre d'une rotation.

On considère dans E_2 quatre points A, B, A', B' tels que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| \neq 0.$$

1° Montrer qu'il existe une unique isométrie positive f telle que

$$f(A) = A', \quad f(B) = B',$$

et que

f est une translation lorsque angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \omega$

f est une rotation lorsque angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \neq \omega$.

2° Dans le second cas (lorsque angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \neq \omega$) construire le centre de la rotation f.

8.37 Centre d'une similitude directe.

Soient A, B (resp. A', B') deux points distincts de E_2. On sait qu'il existe une et une seule similitude directe f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$.

Son angle φ est égal à angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, son rapport μ est $\dfrac{\|\overrightarrow{A'B'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.

1° Supposons φ égal à ω ou à ϖ.
a) Montrer que lorsque $\mu = 1$ f est soit une translation, soit une symétrie par rapport à un point.
b) Montrer que lorsque $\mu \neq 1$ le centre O de f est le point d'intersection des droites (AA') et (BB').

2° Supposons φ différent de ω et de ϖ.

Soit C (resp. C') l'arc de cercle ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}) = \varphi$ (resp. $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MB'}) = \varphi$). Montrer que le centre O de f est le point d'intersection de C et C'.

8.38 1° Étant donnés deux cercles $S(I_1, r_1)$ et $S(I_2, r_2)$ montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) les deux cerles sont orthogonaux (c'est-à-dire se coupent en deux points où leurs tangentes respectives sont orthogonales);

(ii) la puissance de I_1 par rapport à $S(I_2, r_2)$ est r_1^2;

(iii) la puissance de I_2 par rapport à $S(I_1, r_1)$ est r_2^2;

(iv) $r_1^2 + r_2^2 = d(I_1, I_2)^2$;

(v) si dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les coordonnées de I_1 (resp. I_2) sont (a_1, b_1) (resp. (a_2, b_2)) et si les puissances de O par rapport aux deux cercles sont respectivement c_1 et c_2, on a

$$a_1a_2 + b_1b_2 = c_1 + c_2.$$

2° Déterminer tous les cercles orthogonaux à deux cercles distincts C_1 et C_2.
Si Γ_1 et Γ_2 sont deux cercles distincts orthogonaux à C_1 et à C_2 déterminer tous les cercles orthogonaux à Γ_1 et Γ_2.
On distinguera les cas où $C_1 \cap C_2$ est un ensemble ayant 0, 1 ou 2 éléments.

8.39 Soient D_1, D_2, D_3 trois droites de E_2. Étudier, selon leur disposition, l'ensemble des cercles tangents à D_1, D_2 et D_3 (on précisera la position des centres de ces cercles).

8.40 1° Soit C le cercle de E_2 de centre O et de rayon R.
Montrer que l'image C' de C par l'homothétie de centre P et de rapport α est un cercle.
Que peut-on dire du centre O' de C' et de son rayon R'?

2° Considérons deux cercles C, C' de E_2 de centres O, O' et de rayons R, R'.
Nous nous proposons de déterminer les homothéties transformant C en C'.

a) Montrer que si $R = R'$ la seule homothétie répondant à la question est une symétrie par rapport à un point que l'on précisera.

b) Nous supposerons désormais $R \neq R'$.
Montrer qu'il existe deux homothéties répondant à la question. Si P et P' sont les centres de ces homothéties établir que P (resp. P') est le barycentre de O et O' affectés des coefficients R' et $-$ R (resp. R' et R).
P (resp. P') est appelé centre d'homothétie positive (resp. négative).
Étudier en particulier le cas où les cercles sont tangents.

c) Montrer que si une droite est tangente à C et à C' elle contient P ou P'.

d) Déterminer, selon que C et C' ont ou n'ont pas de points communs, les tangentes communes à C et à C'.

8.41 Cercles tangents à un cercle et à une droite.

Soient D une droite de E_2 et C un cercle de E_2, de centre O et de rayon R, non tangent à D.
On note A_1 et A_2 les points communs à C et à la droite contenant O orthogonale à D.

1° Montrer que si un cercle Γ est tangent à D en M et à C en N la droite (MN) contient A_1 ou A_2.

2° Montrer réciproquement que si M et N sont des points de D et C tels que la droite (MN) contienne A_1 (resp. A_2) il existe un et un seul cercle contenant M et N et tangent en ces points à D et C.

3° Montrer qu'un point P de E_2 est centre d'un cercle tangent à D et C si et seulement si

$$|d(P, O) - d(P, D)| = R.$$

4° Montrer que l'ensemble des centres des cercles tangents à D et à C est constitué de deux paraboles de même foyer O et ayant pour directrices des droites D_1 et D_2, parallèles à D, que l'on déterminera.

5° Reprendre les questions précédentes lorsque C est tangent à D.

8.42 Cercles tangents à deux cercles donnés.

Soient C et C' deux cercles de E_2, de centres O et O' et de rayons R et R' distincts.
On note P et P' les centres d'homothéties positive et négative associées à C et C' (cf. exercice 8.40).

1° Montrer que si un cercle Γ est tangent à C en M et à C' en M', la droite (MM') contient P ou P'.

2° Montrer que si M et M' sont des points de C et C' tels que la droite (MM') contienne P (resp. P'), il existe un et un seul cercle contenant M et M' et tangent en ces points à C et à C'.

3° Montrer qu'un point N de E_2 est centre d'un cercle tangent à C et à C' si et seulement si on a

$$|d(O, N) - d(O', N)| = |R - R'|$$

ou

$$|d(O, N) - d(O', N)| = R + R'$$

4° En déduire que l'ensemble des centres des cercles tangents à C et à C' est constitué de deux hyperboles de foyers O, O'.
Montrer que P (resp. P') est un sommet de l'une de ces hyperboles.

8.43 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan affine euclidien E_2.
Si M est le point de coordonnées (x, y) on appelle affixe de M le complexe $x + iy$.

1° Étant donnés quatre points distincts d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4, montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points appartiennent à un même cercle est que le nombre complexe $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$ soit réel.

2° Quelle est la disposition des quatre points lorsque

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = 1.$$

8.44 Équation barycentrique du cercle circonscrit à un triangle.

Soit (A, B, C) un repère affine de E_2 et Γ le cercle contenant A, B et C.
On note (α, β, γ) les coordonnées barycentriques dans le repère (A, B, C) d'un point M de E_2.
Montrer que M, distinct de A, B et C, appartient à Γ si et seulement si on a

$$\frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2}{\gamma} + \frac{\|\overrightarrow{BC}\|^2}{\alpha} + \frac{\|\overrightarrow{CA}\|^2}{\beta} = 0.$$

(Indication : on utilisera l'égalité

$$\alpha \|\overrightarrow{OA}\|^2 + \beta \|\overrightarrow{OB}\|^2 + \gamma \|\overrightarrow{OC}\|^2 = (\alpha + \beta + \gamma) \|\overrightarrow{OM}\|^2 + \alpha \|\overrightarrow{MA}\|^2 + \beta \|\overrightarrow{MB}\|^2 + \gamma \|\overrightarrow{MC}\|^2,$$

O étant le centre du cercle Γ.)

8.45 Faisceaux de cercles. Orthogonalité.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de E_2.
On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans l'ensemble des cercles de E_2 qui à (a, b, c) associe le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + c = 0$.

1° Montrer que f est bijective.

2° On appelle faisceau de cercles l'image par f d'une droite affine de $\mathbb{R}^3$.
Autrement dit si $m_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $m_2 = (a_2, b_2, c_2)$ sont deux points distincts de E_2 ils déterminent une droite de $\mathbb{R}^3$ et l'image de celle-ci par f est un faisceau $\mathcal{F}$ de cercles de E_2. Celui-ci est l'ensemble des cercles d'équation

$$x^2 + y^2 - 2(\lambda^1 a_1 + \lambda^2 a_2)\,x - 2(\lambda^1 b_1 + \lambda^2 b_2)\,y + \lambda^1 c_1 + \lambda^2 c_2 = 0$$

où

$$\lambda^1 + \lambda^2 = 1.$$

a) Montrer que les centres des cercles de $\mathcal{F}$ appartiennent à une même droite D.
Quels sont les points de D qui sont centres d'un cercle de $\mathcal{F}$.

b) Déterminer les éventuels cercles de rayon nul (i.e. cercles-points) de $\mathcal{F}$.

c) Montrer que

- ou bien tous les cercles de $\mathcal{F}$ ont deux points communs A et B symétriques par rapport à D. (Dans ce cas A et B sont appelés les points de base du faisceau);
- ou bien tous les cercles de $\mathcal{F}$ sont tangents en un même point de D;
- ou bien deux cercles quelconques de $\mathcal{F}$ n'ont aucun point commun. Il existe alors deux cercles-points appartenant à $\mathcal{F}$; on dit que $\mathcal{F}$ est un faisceau à points limites (points qui sont les centres des cercles-points appartenant à $\mathcal{F}$).

Montrer que dans les trois cas $\mathcal{F}$ est globalement invariant par une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ orthogonale à D que l'on précisera dans chaque cas.

d) Montrer que Δ est l'ensemble des points ayant même puissance par rapport à tous les cercles de $\mathcal{F}$. On dit que Δ est l'axe radical du faisceau.

Exemple :
C_1 est le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2\,x - 1 = 0$,
C_2 est le cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2\,x - 4\,y + 2 = 0$
et $\mathcal{F}$ le faisceau contenant C_1 et C_2. Donner une équation de l'axe radical de $\mathcal{F}$.

3° *a)* Montrer que les cercles C et C' d'équations

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + c = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2\,a'x - 2\,b'y + c' = 0$$

sont orthogonaux si et seulement si $aa' + bb' = c + c'$.

b) Montrer que si un cercle C' est orthogonal à deux cercles distincts C_1 et C_2 de $\mathcal{F}$, C' est orthogonal à tous les cercles de $\mathcal{F}$ et son centre appartient à l'axe radical Δ de $\mathcal{F}$.

c) Montrer que l'ensemble des cercles orthogonaux à tous les cercles de $\mathcal{F}$ est un faisceau $\mathcal{F}'$. Quel est l'axe radical de $\mathcal{F}'$?

d) Que peut-on dire des natures des faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. (Reprendre la classification du 2° *c*).)

8.46 Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de E_2, A le point de coordonnées (O, a), B le point de coordonnées (O, b).
On suppose $ab < 0$.
On considère la famille $\mathcal{F}$ des cercles C contenant A et B. Si $C \in \mathcal{F}$ on note γ la projection orthogonale de son centre sur $D(O, \vec{i})$ et A' (resp. B') le second point d'intersection de C avec la droite (γ A) (resp. (γ B)).
Quel est l'ensemble des points A' (resp. B') lorsque C décrit $\mathcal{F}$?

8.47 Soit P une parabole de foyer F. Montrer qu'une droite Δ est tangente à P si et seulement si la projection orthogonale de F sur Δ appartient à la tangente au sommet à P.
Lorsque cette condition est réalisée déterminer le point de contact de P et de Δ.

8.48 Soient D et D' deux droites de E_2 non parallèles.
Montrer qu'il existe une infinité de paraboles tangentes à D et à D'. (On établira que tout point de E_2 n'appartenant pas à D ∪ D' est le foyer d'une telle parabole.)

8.49 Soient P_1 et P_2 deux paraboles de même foyer F, et Δ_1, Δ_2 les tangentes aux sommets de P_1 et P_2.

1° Montrer que si Δ_1 et Δ_2 ne sont pas parallèles il existe une et une seule droite, que l'on déterminera, tangente à P_1 et à P_2.

2° Déterminer les points communs à P_1 et à P_2.

8.50 Soit P la parabole de E_2 de foyer F et de directrice D.
Si M est un point de P on note T et N les points d'intersection de l'axe de P avec la tangente et la normale en M à P.
Montrer que F est le milieu de T et N.
Cette propriété caractérise-t-elle les tangentes à P ?

8.51 Soient O et A deux points distincts de E_2 et $\mathcal{F}$ la famille des paraboles de sommet O contenant A.
Si $P \in \mathcal{F}$ on note M le point d'intersection de la tangente en A à P avec l'axe de P, et N le point d'intersection de la tangente en A à P avec la tangente au sommet.
Déterminer l'ensemble des points M et l'ensemble des points N lorsque P décrit $\mathcal{F}$.

8.52 Soient Δ une droite de E_2, M un point de Δ et F un point de E_2 n'appartenant pas à Δ.

1° Si P est une parabole de foyer F tangente en M à Δ, déterminer la directrice de P.

2° En déduire qu'il existe une et une seule parabole de foyer F tangente à Δ en M.

8.53 Soient D une droite de E_2 et A et B deux points distincts de E_2 n'appartenant pas à D.

1° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une parabole contenant A et B et admettant D pour directrice est que

$$|\,d(A, D) - d(B, D)\,| \leqslant d(A, B) \leqslant d(A, D) + d(B, D).$$

2° Lorsque cette condition est vérifiée déterminer les foyers des paraboles répondant à la question.

8.54 Soient D et D′ deux droites de E_2 et O un point équidistant de D et D′ ne leur appartenant pas. On note P (resp. P′) la parabole de foyer O et de directrice D (resp. D′).

1° Déterminer les points communs à P et à P′.

2° Si angle $(D, D') = \varphi$ et $d(O, D) = d(O, D') = R$, calculer la distance des deux points communs à P et à P′ en fonction de R et de φ.

8.55 Soient D une droite de E_2 et O un point de E_2 n'appartenant pas à D.

1° Quel est l'ensemble des points dont la somme des distances à D et à O est a, où a est un réel strictement positif donné.

2° a étant un réel strictement positif donné, déterminer

a) l'ensemble des points M de E_2 tels que

$$| d(M, D) - d(M, O) | = a$$

b) l'ensemble des points M de E_2 tels que

$$d(M, D) - d(M, O) = a.$$

8.56 Étant donné un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2 on considère la parabole P d'équation $y^2 = 2px$. Si D est une droite contenant le foyer F de P on note M et M′ les points d'intersection de D et de P.
Quel est l'ensemble des milieux de M et M′ lorsque D décrit le faisceau des droites contenant F.

8.57 Étant donné un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2 on considère la parabole P d'équation $y^2 = 2px$. Si M est un point de P on note N la projection orthogonale du foyer F de P sur la normale à P en M.

1° Donner une équation de l'ensemble ayant pour éléments les points N ainsi obtenus lorsque M décrit P.

2° Donner une équation de cet ensemble dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$. Quelle est sa nature?

8.58 1° Étant données deux paraboles P_1 et P_2 de E_2 montrer qu'il existe deux similitudes de E_2 transformant P_1 en P_2.

2° A quelles conditions doivent satisfaire deux hyperboles H_1 et H_2 (resp. deux ellipses E_1 et E_2) pour qu'il existe au moins une similitude s de E_2 telle que $s(H_1) = H_2$ (resp. $s(E_1) = E_2$). Déterminer alors l'ensemble des similitudes s telles que $s(H_1) = H_2$ (resp. $s(E_1) = E_2$).

8.59 Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2 on désigne par M (x, y) un point de la conique C d'excentricité e, de foyer O, ayant pour directrice associée à O la droite d'équation $x = p$. Déterminer en fonction de x, y, p, l'ordonnée du point Q où la tangente en M à C rencontre D.
Que peut-on dire des deux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OQ}$?
En déduire que les tangentes à la conique aux points où une droite issue de O la rencontre, se coupent sur la directrice D.

8.60 Soit H l'hyperbole d'équation $xy = 1$ dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2.

1° Une droite D de E_2 rencontre H en deux points M_1 et M_2 et les axes en deux points P_1 et P_2. Montrer que les couples (M_1, M_2) et (P_1, P_2) ont même milieu.

2° Soit δ une droite de $\mathcal{E}_2$.
Montrer que si D est une droite de E_2 de direction δ rencontrant H en des points M_1, M_2, éventuellement confondus, le milieu de M_1 et M_2 appartient à une droite Δ ne dépendant que de δ que l'on déterminera.
Préciser quels sont les points de Δ qui sont effectivement milieu d'un couple (M_1, M_2) de points de H tels que (M_1M_2) ait pour direction δ.

8.61 Soient F et F′ deux points distincts de E_2 et a un réel strictement positif.
On note E l'ellipse ensemble des points M tels que

$$d(M, F) + d(M, F') = 2a ,$$

et H l'hyperbole ensemble des points M tels que

$$| d(M, F) - d(M, F') | = 2a.$$

On appelle cercle directeur de foyer F (resp. F′) le cercle C (resp. C′) de centre F (resp. F′) et de rayon $2a$.

1° Montrer qu'une droite Δ est tangente à E (resp. à H) si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) l'image de F par la symétrie orthogonale par rapport à Δ appartient à C′;

(ii) l'image de F′ par la symétrie orthogonale par rapport à Δ appartient à C.
Déterminer dans ce cas le point de contact de Δ et de E (resp. H).

2° Soient A et A′ les points de E (resp. H) appartenant à la droite (FF′).
On appelle cercle principal le cercle de diamètre AA′.
Montrer que le cercle principal est l'image de C′ (resp. C) dans l'homothétie de centre F (resp. F′) et de rapport 1/2.

3° En déduire qu'une droite Δ est tangente à E (resp. H) si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) la projection orthogonale de F sur Δ appartient au cercle principal;

(ii) la projection orthogonale de F′ sur Δ appartient au cercle principal.

8.62 Enveloppe d'une famille de droites.

Soit $(D_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de droites de E_2.
On dit qu'un arc paramétré Γ est une enveloppe de cette famille si

- $\forall \lambda \in \Lambda$ D_λ est tangente à Γ;
- $\forall M \in \Gamma$ il existe une droite D_λ tangente à Γ en M.

1° Soient Δ une droite de E_2 et F un point n'appartenant pas à Δ. A tout point m de Δ on associe la droite D_m contenant m et orthogonale à la droite (Fm).
Montrer que la parabole P, de foyer F et de tangente au sommet Δ, est une enveloppe de la famille $(D_m)_{m \in \Delta}$.

2° Soient C un cercle de E_2 de centre O et de rayon R et F un point de E_2. A tout point m de C (distinct de F lorsque F appartient à C) on associe la droite D_m contenant m et orthogonale à la droite (Fm).

a) Si $d(O, F) < R$, montrer que l'ellipse E admettant F pour foyer et C pour cercle principal (cf. exercice 8.61) est une enveloppe de la famille $(D_m)_{m \in C}$.

b) Si $d(O, F) = R$, montrer que le symétrique de F par rapport à O est une enveloppe de la famille $(D_m)_{m \in C}$.

c) Si $d(O, F) > R$, montrer que l'hyperbole H admettant F pour foyer et C pour cercle principal (cf. exercice 8.61) est une enveloppe de la famille $(D_m)_{m \in C}$.

8.63 Soient D une droite de E_2 et F un point n'appartenant pas à D.

1° Si m est un point de D on note $D_1(m)$ et $D_2(m)$ les bissectrices des droites (mF) et D.

a) Montrer que la parabole P de foyer F et de directrice D est une enveloppe des droites $D_1(m)$ et $D_2(m)$ lorsque m décrit D.

b) Si M_1 et M_2 sont les points de contacts de P avec $D_1(m)$ et $D_2(m)$ montrer que la droite (M_1M_2) contient F.

2° Montrer que la directrice D de P est l'ensemble des points de E_2 appartenant à deux tangentes à P orthogonales.

8.64 Soient A, B, C trois points non alignés de E_2.

1° Montrer qu'un point F de E_2 est le foyer d'une parabole tangente aux droites (BC), (CA), (AB) si et seulement si les projections orthogonales de F sur ces droites sont alignées; dans ce cas montrer qu'il y a une et une seule parabole de foyer F ayant cette propriété.

2° Quel est l'ensemble Φ des foyers des paraboles tangentes à (BC), (CA), (AB)?

3° Si D_F est la directrice de la parabole de foyer F, $F \in \Phi$, tangente à (BC), (CA), (AB), trouver une enveloppe de la famille $(D_F)_{F \in \Phi}$.

8.65 Soit H l'hyperbole d'équation $xy = 1$ dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2.
Si M est un point de H, on note A et B les points d'intersection de la tangente en M à H avec les asymptotes $D(O, \vec{i})$ et $D(O, \vec{j})$.
1° Montrer que M est le milieu de A et B.
2° Montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ ne dépend pas du point M.
3° En déduire que, pour une valeur convenable de m que l'on déterminera, H est une enveloppe de la famille des droites rencontrant $D(O, \vec{i})$ et $D(O, \vec{j})$ en des points A et B tels que

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = m\,\vec{i}.\vec{j}.$$

8.66 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de E_2.

1° On note E l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et F, F′ ses foyers.

Étant donnée une droite D de E_2 on désigne par M et M′ les projections orthogonales de F et F′ sur D.
Montrer que D est tangente à E si et seulement si

$$\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{F'M'} = b^2.$$

2° On note H l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ et F, F′ ses foyers.

Étant donnée une droite D de E_2 on désigne par M et M′ les projections orthogonales de F et F′ sur D.
Montrer que D est tangente à H si et seulement si

$$\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{F'M'} = -b^2.$$

8.67 Pôles et polaires.

On considère dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de E_2 la courbe $\mathcal{C}$ d'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

On note Γ la matrice $\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$.

Alors le point M (x, y) appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$(x\,y\,1)\,\Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

1° On dit que $\mathcal{C}$ est non dégénérée si $\mathcal{C}$ est
- soit une parabole
- soit une ellipse non réduite à un point
- soit une hyperbole.

En reprenant l'étude des courbes d'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

faite dans le cours, montrer que $\mathcal{C}$ est non dégénérée si et seulement si $\det \Gamma \neq 0$.

2° On suppose que $\mathcal{C}$ est non dégénérée. Montrer, par le calcul, que la droite D d'équation $ux + vy + w = 0$ est tangente à $\mathcal{C}$ si seulement si

$$(u\,v\,w)\,\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0.$$

3° **Conjugaison.**

On suppose $\mathcal{C}$ non dégénérée.
On dit que deux points M (x, y) et M′ (x', y') sont conjugués par rapport à $\mathcal{C}$ si

$$Axx' + B(xy' + x'y) + Cyy' + D(x + x') + E(y + y') + F = 0$$

ce qui équivaut à

$$(x\,y\,1)\,\Gamma \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

a) Montrer que l'ensemble des conjugués du point M_0 (x_0, y_0) est la droite D d'équation

$$ux + vy + w = 0$$

où

$$(u\;v\;w) = (x_0\,y_0\,1)\,\Gamma.$$

D est appelée la **polaire** du point M_0.
Application numérique :
Si $\mathcal{C}$ a pour équation $2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ déterminer une équation de la polaire du point de coordonnées $(1, -1)$.
b) Soit Δ une droite de E_2 d'équation $ux + vy + w = 0$.
Montrer qu'il existe un et un seul point M_0, appelé **pôle** de Δ, dont Δ soit la polaire, et que les coordonnées (x_0, y_0) de M_0 vérifient

$$(x_0\,y_0\,1) = \lambda\,(u\;v\;w)\,\Gamma^{-1}$$

où λ est un scalaire non nul.
Pratiquement, on remarque que les équations

$$ux + vy + w = 0 \quad \text{et} \quad (Ax_0 + By_0 + D)\,x + (Bx_0 + Cy_0 + E)\,y + Dx_0 + Ey_0 + F = 0$$

représentent la même droite, donc que les coefficients sont proportionnels.
Application numérique :
Si $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 - y^2 + 2x = 0$ quel est le pôle de la droite Δ d'équation

$$2x + 3y - 1 = 0?$$

c) Soient M_1 et M_2 deux points distincts de E_2 et D_1, D_2 leurs polaires. Montrer que le pôle de (M_1M_2) est l'unique point commun à D_1 et à D_2.
d) Montrer qu'une droite D de E_2 est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si elle contient son pôle, et que dans ce cas le point de contact de D et $\mathcal{C}$ est le pôle de $\mathcal{C}$.
e) Montrer que si M est un point de E_2 contenu dans deux tangentes à $\mathcal{C}$ distinctes et si M_1 et M_2 sont les points de contact, la polaire de M est la droite (M_1M_2).
f) Soient D et D′ deux droites de E_2 d'équations respectives

$$ux + vy + w = 0, \quad u'x + v'y + w' = 0.$$

On dit que D et D′ sont conjuguées si l'une des droites contient le pôle de l'autre.
Montrer que D et D′ sont conjuguées si et seulement si

$$(u\,v\,w)\,\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = 0.$$

En particulier une droite D est tangente à $\mathcal{C}$ si elle est conjuguée d'elle-même.

4° **Transformation par polaires réciproques.**

On suppose que $\mathcal{C}$ est non dégénérée.

A tout point M de E_2 on peut associer sa polaire D_M par rapport à $\mathcal{C}$ et à toute droite Δ de E_2 on peut associer son pôle M_Δ par rapport à $\mathcal{C}$; de plus si $M \in \Delta$ on a $M_\Delta \in D_M$. Si $\mathcal{D}$ est une courbe de E_2 admettant une tangente en chacun de ses points, on appelle transformée de $\mathcal{D}$ par polaires réciproques par rapport à $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathcal{D}'$ des points M_Δ lorsque Δ décrit l'ensemble des tangentes à $\mathcal{D}$.

a) Montrer que $\mathcal{D}'$ est une enveloppe de la famille des polaires des points de $\mathcal{D}$.

b) Montrer que la transformée de $\mathcal{D}'$ par polaires réciproques par rapport à $\mathcal{C}$ est $\mathcal{D}$.

c) Supposons que $\mathcal{D}$ est une conique non dégénérée d'équation

$$(x\,y\,1)\,\mathcal{S}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

où $\mathcal{S}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

Montrer que $\mathcal{D}'$ est la conique d'équation

$$(x\,y\,1)\,\Gamma\mathcal{S}^{-1}\Gamma\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} = 0.$$

Retrouver ainsi que $\mathcal{D}$ est la transformée de $\mathcal{D}'$.

8.68 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de E_2 et A un point de $D(O, \vec{j})$ distinct de O.

Déterminer l'ensemble des centres des cercles C tangents à $D(O, \vec{i})$ tels que la polaire de O par rapport à C contienne A.

(La polaire du point $M_0(x_0, y_0)$ par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + c = 0$$

est la droite d'équation

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0.)$$

8.69 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E_3, on considère l'ensemble C des points $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation

$$x^2 + y^2 - m^2z^2 = 0$$

où m est un réel strictement positif.

1° Montrer que C est un cône de révolution de sommet O et d'axe $D(O, \vec{k})$.

(Autrement dit il faut montrer que $\forall M \in C$ la droite (OM) est contenue dans C et que C est invariant par toute rotation d'axe $D(O, \vec{k})$).

2° a étant un réel non nul et h un réel positif, on considère le plan Π d'équation $z = hy + a$.

Écrire l'équation de la projection orthogonale γ de $\Gamma = \Pi \cap C$ sur le plan $P(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Toute conique est-elle isométrique à une courbe γ (pour un choix convenable de m, h, a)?

3° Ω étant le point commun à Π et à $D(O, \vec{k})$ on considère dans Π un repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}')$.

Écrire l'équation de Γ dans ce repère.

Toute conique est-elle isométrique à une courbe Γ (pour un choix convenable de m, h, a)?

4° Montrer que Γ et γ sont simultanément des ellipses, des hyperboles ou des paraboles. Montrer que si Γ est une hyperbole, les asymptotes de γ sont les projections des asymptotes de Γ.

9| Géométrie descriptive

Ce chapitre de géométrie descriptive correspond à une partie du programme de Terminale E qui ne figure pas en Terminale C (mais les élèves de Terminale C pourraient y trouver aussi des applications simples des notions étudiées dans les chapitres précédents). On y traite de la représentation des rotations d'axe orthogonal à un plan de projection, des rabattements déjà vus en Première, mais que l'étude de la géométrie de Terminale permet de reprendre d'un point de vue plus élevé, de la représentation du cercle, et des cônes et cylindres de révolution et de leurs sections planes lorsque ces divers éléments occupent des positions simples par rapport aux plans de projections, et enfin de la représentation d'une hélice circulaire d'axe orthogonal à un plan de projection.

9. 1 ROTATION AUTOUR D'UN AXE VERTICAL OU DE BOUT

Un point M étant donné par ses projections m, m', le problème est de déterminer les projections de son image M_1 par une rotation donnée r dont l'axe D est vertical (resp. de bout).

On sait que M et M_1 sont dans un même plan orthogonal à D, donc horizontal (resp. de front), que si P et P_1 sont les projections orthogonales de M et M_1 sur un plan horizontal H (resp. frontal F), P_1 est l'image de P dans la rotation r, et que la restriction de r à un plan horizontal (resp. frontal) est une rotation de ce plan ayant pour centre l'intersection du plan et de D.

Ceci s'applique en particulier au plan horizontal (resp. frontal) de projection H_0 (resp. F_0). Traçons l'épure en supposant que D est verticale (elle est alors déterminée par sa projection horizontale qui est un point d).

Les projections frontales m' et m ont même cote, la projection m_1 se déduit de m par une rotation r_0 de H_0 de centre d. Cette rotation peut être définie par un couple de points homologues, par son angle (c'est-à-dire par un représentant de cet angle : couple de vecteurs, ou couple de demi-droites), ou par la mesure de cet angle, D ayant été orientée

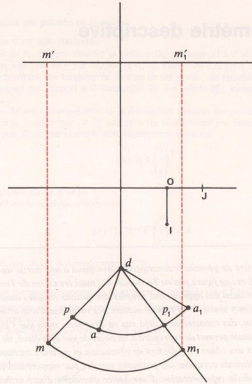


fig. 1

(en général dans le sens des cotes croissantes) et H_0 ayant reçu l'orientation compatible avec celle de D (c'est-à-dire avec les conventions usuelles, par le repère $(\vec{O}, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ de la figure 1).

L'épure a été faite en supposant que r_0 a été donnée par le couple (a, a_1).
Pour déterminer graphiquement le point m_1 connaissant m, on remarque que m_1 est sur le cercle de centre d contenant m et que angle $(\overrightarrow{dm}, \overrightarrow{dm_1})$ = angle $(\overrightarrow{da}, \overrightarrow{da_1})$. On peut utiliser un rapporteur pour tracer la demi-droite d'origine d et de vecteur directeur $\overrightarrow{dm_1}$. On peut aussi remarquer que si p et p_1 sont les points où les demi-droites d'origine d et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{dm}$ et $\overrightarrow{dm_1}$ coupent le cercle de centre d contenant a, on a $\|\overrightarrow{pp_1}\| = \|\overrightarrow{aa_1}\|$, ce qui permet, en utilisant le compas de tracer p_1 connaissant a, a_1 et p.

EXERCICE

1. Faire une épure analogue en supposant D de bout.

Une rotation d'axe vertical (ou de bout) peut être utilisée pour associer à un ensemble à étudier un ensemble isométrique ayant une position jugée plus commode par rapport aux plans de projection.

On peut par exemple, utiliser une rotation d'axe vertical qui donne pour image d'une droite une droite frontale, ou qui donne pour image d'un plan un plan de bout. On dit alors, par un abus de langage classique, que l'on a rendu la droite frontale ou le plan de bout.

EXERCICE

2. Faire l'épure de la rotation autour d'un axe vertical rendant frontale une droite donnée et de la rotation autour du même axe rendant de bout un plan donné. On tracera d'abord le couple (a, a_1) qui détermine cette rotation.

REMARQUE

Il est en général plus commode en pratique d'opérer un changement de plan frontal de projection pour que par rapport à ce nouveau plan une droite donnée (resp. un plan donné) soit frontale (resp. de bout) car le changement de plan ne fait faire de nouveaux tracés que dans une projection, tandis que la rotation en fait faire dans les deux.

EXERCICE

3. (i) Montrer que la distance de deux droites parallèles à un même plan vertical (resp. de bout) est celle de leurs projections horizontales (resp. frontales) qui sont alors parallèles.
(ii) Deux droites non concourantes étant données par leurs projections, déterminer leur distance, en se ramenant au cas (i) soit par une rotation convenable, soit par un changement de plan convenable.
Comparer la complexité des tracés effectués dans les deux cas.

9. 2 RABATTEMENT

Le rabattement d'un plan P *sur un plan horizontal (resp. frontal) a été étudié en classe de Première. Nous résumons ici les résultats essentiels, en traitant le cas du rabattement sur un plan horizontal.*

La projection d'un plan P sur un plan horizontal H est une isométrie si et seulement si P est horizontal. Si par suite, on doit utiliser des propriétés métriques de P ou effectuer des mesures de longueur ou d'angle, il est utile d'associer à P un plan horizontal P_1 déduit de P par rotation autour de l'intersection D de P et de P_1 qui est une droite horizontale de P. D étant choisie, il existe deux rotations d'axes D transformant P en P_1. On choisit D et une de ces rotations de telle sorte que les tracés décrits ci-dessous soient aussi faciles à exécuter que possible et que les points à tracer soient tous « dans les limites de l'épure ». Excluant le cas où P est vertical, il est aisé de voir que l'application α qui à la projection horizontale m d'un point M de P associe la projection horizontale m_1 du point M_1, image de M par la rotation d'axe D choisie, est une affinité orthogonale d'axe d et de rapport $\frac{1}{\text{Cos}\,\theta}$, si θ est l'angle de la rotation.

On dit que M_1 est **le rabattement** de M, et par abus de langage que m_1 est le rabattement de M, ou même de m.

On ne cherchera pas, en général, à déterminer θ, mais on remarquera qu'une affinité orthogonale est déterminée par son axe et un couple de points homologues (ce que l'on exprime en disant que l'on peut déterminer le rabattement de tout point dès que l'on connaît le rabattement d'un point particulier n'appartenant pas à l'axe).

On utilise les renseignements fournis par les deux projections pour déterminer le rabattement a_1 d'un point A (a, a'). Après quoi, toutes les constructions se feront uniquement dans le plan horizontal de projection, où l'on utilisera les propriétés suivantes de l'affinité orthogonale : les points de d sont invariants, l'alignement des points et le parallélisme des droites sont des invariants, les droites orthogonales à d sont invariantes.

S'il s'agit d'effectuer une mesure, elle sera faite dans le plan horizontal de projection. S'il s'agit de construire certains éléments ou certaines parties de P, on obtiendra leur

projection horizontale en utilisant l'affinité réciproque α^{-1} de α, puis leur projection frontale en « **rappelant** » en projection frontale les points de P dont on a ainsi déterminé la projection horizontale. (On dit souvent que $m = \alpha^{-1}(m_1)$ est obtenu en « **relevant** » m_1, ou encore est le relèvement de m_1.)

a) **Détermination du rabattement d'un point A de projections (a, a').**

Nous supposons que D, appelée charnière du rabattement, est déterminée par ses deux projections d et d'. La droite contenant a et a_1 est orthogonale à d qu'elle rencontre au point i, projection horizontale de I, projection orthogonale de A sur D (fig. 2).

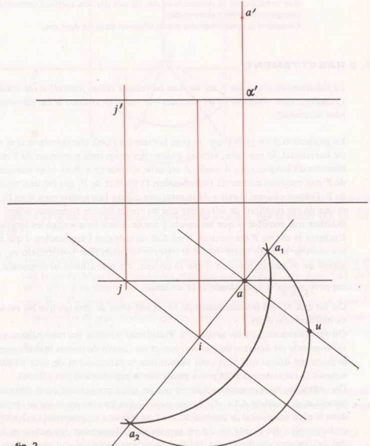


fig. 2

On a
$$d(i, a_1) = d(\mathrm{I}, \mathrm{A}).$$

Or si B (a, α') est le point où la projetante verticale de A rencontre le plan horizontal contenant D, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ sont orthogonaux, d'où $\|\overrightarrow{\mathrm{IA}}\|^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{IB}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\|^2$, mais $\overrightarrow{\mathrm{IB}}$ est horizontal, d'où $\|\overrightarrow{\mathrm{IB}}\| = \|\overrightarrow{ia'}\|$ et $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ est vertical, d'où $\|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\| = \|\overrightarrow{a'\alpha'}\|$.
On peut tracer dans le plan horizontal de projection, un point u tel que $\overrightarrow{au}$ soit parallèle à D donc orthogonal à $\overrightarrow{ia}$ et de longueur $\|\overrightarrow{\alpha'a'}\|$. On a alors $\|\overrightarrow{iu}\| = \|\overrightarrow{ia_1}\|$.
D'où deux positions possibles pour a_1 (figurées en a_1 et a_2 sur la figure).
Une autre méthode consiste à choisir sur D le point J tel que $\overrightarrow{\mathrm{JA}}$ soit frontal : $\overrightarrow{aj}$ est alors parallèle à la ligne de terre, et on a

$$\|\overrightarrow{j'a'}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{JA}}\| = \|\overrightarrow{ja_1}\|.$$

Cette seconde méthode, dite de la frontale, exige un peu moins de tracés que la précédente, mais si l'angle du cercle de centre j et de rayon $\|\overrightarrow{j'a'}\|$ et de la droite (ia) est petit, la détermination du point a_1 peut être peu précise.

EXERCICES

1. θ étant une détermination de la mesure de l'angle de la droite (ia) et de la tangente au cercle de centre j et de rayon $r = \|\overrightarrow{ja_1}\|$ au point a_1, déterminer l'erreur commise sur la position de a_1, si une erreur absolue ε a été commise dans la détermination de r. Étudier la variation de cette erreur en fonction de θ pour ε donné. Donner des valeurs approchées de cette erreur en supposant ε « *négligeable* » devant r, puis en supposant $r \sin\theta$ « *négligeable* » devant ε.
2. Déterminer la distance d'un point A à une droite D, en rabattant le plan contenant D et A autour d'une de ses horizontales.
3. Déterminer l'angle de deux droites concourantes D_1 et D_2, en rabattant leur plan autour d'une de ses horizontales (ou d'une de ses frontales). Faire l'épure dans le cas général, puis en supposant que D_1 est frontale.
4. Construire dans un plan P donné par deux droites concourantes, les triangles équilatéraux ayant pour sommets deux points donnés.

b) **Application : Représentation d'un cercle.**

Soit un cercle C de centre I, de rayon r, situé dans un plan P.
Dans un rabattement horizontal ayant pour charnière l'horizontale H de P contenant I, le rabattement de C est le cercle C_1 de centre i, de rayon r. Le relèvement en sera déduit par une affinité orthogonale d'axe h, de rapport $\cos\theta$ si θ est l'angle de la rotation correspondant au rabattement. On obtient donc une ellipse de centre i, dont le grand axe porté par h a pour longueur $2r$, et le petit axe $2r\cos\theta$. Cette ellipse pourra être tracée point par point dès que l'on aura le relèvement d'un point de C_1, c'est-à-dire la projection horizontale d'un point de C.

On peut utiliser plusieurs méthodes :

- Déterminer la projection b d'un point B du cercle situé sur le diamètre orthogonal à H (b est un sommet du petit axe de l'ellipse projection horizontale du cercle).
A cet effet, on peut utiliser un changement de plan frontal tel que P soit de bout par

rapport au nouveau plan frontal (on supposera que h' est la ligne de terre, ce qui revient sans changer l'épure à supposer que les deux plans de projection initiaux ont subi une translation orthogonale à la ligne de terre et parallèle au deuxième bissecteur) (fig. 3).

On choisit un point de P, par exemple pour diminuer le nombre de tracés le point se projetant en b_1, soit (b_1, β'). Ses nouvelles projections sont (b_1, β_1') avec $\|\overrightarrow{u\beta'}\| = \|\overrightarrow{b_1\beta_1'}\|$.

La nouvelle projection frontale b_1' du point B appartient à l'intersection du cercle C_1 et de la droite $(i\beta_1')$. On en déduit en projetant sur (ib_1) la projection horizontale b de B.

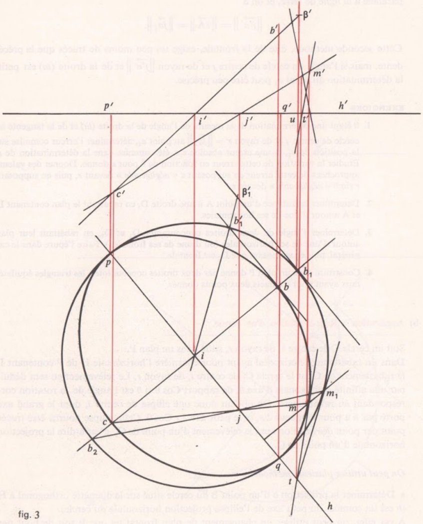


fig. 3

Dans une affinité, et dans une projection, qui sont des applications affines, l'image d'une tangente à une courbe est une tangente à l'image; cela permet lorsque le point m_1 est relevé en m, et que m est relevé en m' de tracer les tangentes (mt) et $(m't')$ aux ellipses projections horizontales et frontales de C. Ces deux droites sont les projections de la tangente en M au cercle C.

REMARQUE

Si (b_1, b) est un couple de points homologues dans l'affinité utilisée, il en est de même de (b_2, c). Il est souvent avantageux, pour construire m à partir de m_1 d'utiliser celui des deux couples qui n'est pas dans le demi-plan déterminé par h et contenant m_1.

EXERCICES

1. Décrire les constructions qui sur la figure 3 ont permis d'obtenir (mt) et $(m't')$. Compléter l'épure de la figure 3 en construisant les tangentes en p', q', b', c' à l'ellipse projection frontale de C.
2. Faire l'épure donnant les deux ellipses projections d'un cercle en utilisant pour la projection frontale la méthode correspondant à celle qui a été décrite ci-dessus pour la projection horizontale.

• On peut remarquer que l'on a immédiatement les projections horizontales des extrémités du diamètre de front de C (et de même les projections frontales du diamètre horizontal de C).

Cela amène aux constructions suivantes : déterminer l'horizontale (h, h') et la frontale (f, f') du plan P contenant I. Tracer les projections (α_1, α_1'), (α_2, α_2') des extrémités du diamètre horizontal de C, et (β_1, β_1'), (β_2, β_2') des extrémités du diamètre frontal de C (fig. 4).

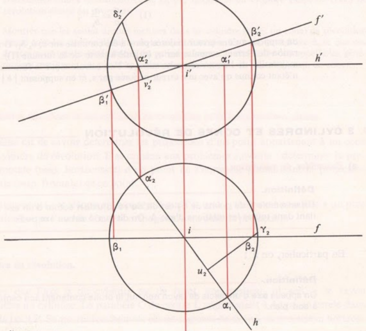


fig. 4

On a $$\|\overrightarrow{i\,\alpha_1}\| = \|\overrightarrow{i\,\alpha_2}\| = \|\overrightarrow{i'\beta'_1}\| = \|\overrightarrow{i'\beta'_2}\| = r.$$

A partir de là, construire les ellipses comme relèvement des cercles de centres i et i' et de rayons r.

REMARQUE

Les rapports des affinités utilisées sont respectivement $\frac{\overline{u_2\beta_2}}{\overline{u_2\gamma_2}}$ dans le plan horizontal, et $\frac{\overline{v'_2\alpha'_2}}{\overline{v'_2\delta'_2}}$ dans le plan frontal.

La seconde méthode exige moins de tracé que la première, mais celle-ci fournit des rapports d'affinité avec un numérateur et un dénominateur plus grands en valeur absolue que la première méthode, et par suite, à égalité d'erreur sur la détermination des points, avec une plus petite erreur. Graphiquement la première méthode sera souvent supérieure. L'utilisation simultanée des deux permet de vérifier l'exactitude des tracés.

EXERCICE 3

Achever l'épure commencée sur la figure 4, en traçant les deux projections du cercle et en rappelant les points remarquables et leurs tangentes d'une projection à l'autre.

EXERCICE 4

Les erreurs commises sur deux nombres réels a et b de rapport donné k étant majorées par le même nombre ε, évaluer une majoration de l'erreur commise sur le rapport. Comment varie cette majoration avec $|b|$. Étant donnés quatre nombres a, b, a_1, b_1 tels que

$$(1) \qquad \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \quad ,$$

on suppose qu'une erreur majorée par ε a été commise sur a, b, b_1. Donner une majoration de l'erreur commise sur a_1 (calculé à partir de la formule (1)). Comparer à la majoration de l'erreur commise sur a, si l'on calcule a par la formule (1), a_1, b_1 et b n'étant connus qu'avec une erreur majorée par ε, et en supposant $|b| > |b_1|$.

9. 3 CYLINDRES ET CONES DE RÉVOLUTION

a) Ensembles de révolution.

Définition.

Un ensemble F de points de E_3 est dit **de révolution** autour d'un axe Δ s'il est invariant dans toutes les rotations d'axe Δ. On dit que Δ est un axe de F.

En particulier, on a :

Définition.

On appelle **axe** d'un cercle de rayon non nul, la droite contenant son centre, orthogonale à son plan.

EXERCICE

1. Montrer qu'un ensemble F est de révolution autour d'un axe Δ si et seulement s'il est réunion de cercles d'axe Δ. Les cercles d'axe Δ dont F est la réunion sont appelés **les parallèles** de F.

Étant donné un ensemble G, l'union des cercles d'axe Δ contenant au moins un point de G est un ensemble de révolution F autour de Δ, dont G est appelée une **partie génératrice.** Si G est une droite, on dit que G est une **génératrice rectiligne** de F.

Définitions.

On appelle **cylindre de révolution** d'axe Δ un ensemble de révolution autour de Δ ayant pour génératrice une droite parallèle à Δ distincte de Δ.

On appelle **cône de révolution** d'axe Δ un ensemble de révolution autour de Δ ayant pour génératrice une droite distincte de Δ, non orthogonale à Δ et rencontrant Δ en un point S appelé **sommet** du cône.

EXERCICES

2. Montrer qu'un cylindre de révolution est déterminé par la donnée d'un de ses parallèles, et qu'un cône de révolution est déterminé par la donnée d'un parallèle et du sommet (qui doit appartenir à l'axe du parallèle).
3. Déterminer toutes les isométries de E_3 par lesquelles un cylindre (resp. un cône) de révolution donné est invariant.
4. Montrer que les seules droites incluses dans un cylindre (resp. un cône) de révolution donné sont les droites déduites de la génératrice par les rotations d'axe Δ, et que ces droites sont toutes génératrices du cylindre (resp. du cône). On les appelle les génératrices rectilignes, ou par abus de langage génératrices du cylindre (resp. du cône).

b) Représentation des cônes et des cylindres de révolution et de leurs sections planes.

Le problème est de savoir déterminer les projections d'un point appartenant à un cône ou à un cylindre de révolution. Il se ramène aux problèmes suivants : déterminer la projection frontale (resp. horizontale) d'un point de l'ensemble connaissant la projection horizontale (resp. frontale) de ce point.

Nous traiterons ces problèmes en supposant que l'axe du cylindre est parallèle à un plan de projection et que l'axe du cône est orthogonal à un plan de projection.

1. Cylindre de révolution.

Supposons que l'axe Δ du cylindre est de front, non vertical, et soit ρ le rayon des parallèles du cylindre. Le parallèle C de centre I, appartenant à Δ, est un cercle dans un plan de bout P. Sa projection frontale est un segment de droite, sa projection horizon-

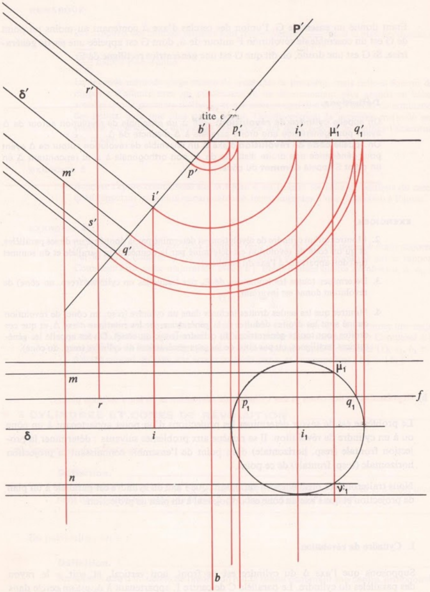


fig. 5

tale une ellipse. Il n'y a pas lieu de la tracer en général, mais il est plus avantageux de considérer le cercle horizontal C_1 déduit de C par une rotation autour d'un axe de bout (b, b') situé dans le plan P. (Cette rotation est aussi un rabattement, et tout ce qui a été dit des rotations et des rabattements peut être utilisé ici.) *Une génératrice du cylindre et son image par cette rotation sont dans le même plan de front.* Soit I_1 le centre du cercle C_1 (fig. 5).

Donnons-nous alors la projection frontale m' d'un point M que l'on cherche à situer sur le cylindre. Si M est un tel point, sa projection orthogonale sur P a pour projection frontale le point μ' intersection de P' et de la parallèle à δ' passant par m'. Dans la rotation autour de (b, b'), un point de projection frontale μ' a pour image un point de projection frontale μ'_1, qui est projection frontale d'un point de C_1 si et seulement si $d(i'_1, \mu'_1) \leqslant \rho$. Si l'inégalité est stricte, on obtient deux solutions (μ_1, μ'_1) et (ν_1, ν'_1), d'où les projections horizontales des génératrices sur lesquelles on rappelle m' en m et n. Si $d(i'_1, \mu'_1) = \rho$, on obtient un seul point de C_1 et une seule génératrice.

On en conclut que le problème a au moins une solution si et seulement si m' est dans la bande fermée d'axe δ' et de demi-longueur ρ.

Les droites qui limitent cette bande sont les projections frontales des génératrices du cylindre contenant les points où la tangente à C est de bout. On les appelle *génératrices de contour apparent frontal.*

Si l'on se donne la projection horizontale r, et s'il y a un point R du cylindre se projetant en r, le plan du front contenant R coupe le cylindre suivant une ou deux génératrices se projetant suivant la droite f. Dans la rotation d'axe (b, b') ces génératrices ont pour image des verticales situées dans le même plan de front et se projetant horizontalement sur le cercle de centre i_1 et de rayon ρ. Il n'y a de solution que si r est dans la bande fermée d'axe δ et de demi-longueur ρ.

Si r est à l'intérieur de la bande, on obtient deux points p_1, q_1 qui se rappellent en p'_1, q'_1 que l'on relève en p', q', d'où les points (r, r'), (r, s') cherchés.

Si r est sur le bord de la bande, il n'y a qu'une solution. R est alors sur une des génératrices passant par un point de C où la tangente est de front : ces *génératrices* sont dites *de contour apparent horizontal.*

• **Section par un plan de bout d'un cylindre de révolution d'axe de front.**

Utilisant les mêmes notations que ci-dessus, on peut énoncer :

La section du cylindre par un plan de bout Π non parallèle à Δ (auquel cas l'intersection serait ou le vide, ou une génératrice de contour apparent, ou l'union de deux génératrices distinctes) se projette orthogonalement sur P selon C, c'est donc une ellipse E, qui se projette horizontalement suivant une ellipse *e* et frontalement suivant un segment de droite.

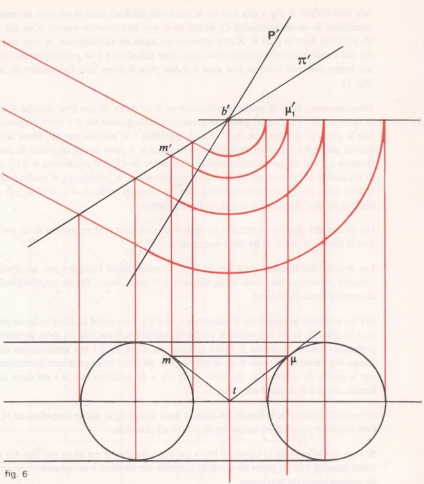


fig. 6

L'application qui à la projection horizontale m d'un point M de E associe le point m_1, projection du point de C_1 correspondant au point où la génératrice contenant M rencontre C, est une affinité orthogonale d'axe b (fig. 6).

EXERCICE

5. Justifier l'affirmation précédente.

En utilisant cette affinité, il est possible de construire point par point l'ellipse e et de déterminer la tangente à e en chacun de ses points.

EXERCICE

6. Montrer que la tangente en M à E est l'intersection de Π et du plan déterminé par la génératrice contenant M et par la tangente à C au point où cette génératrice rencontre C.

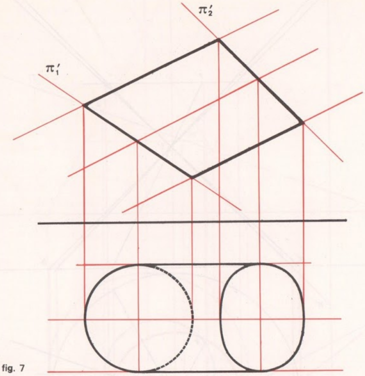


fig. 7

Mais on peut remarquer aussi que si Π rencontre Δ en J, la droite de bout contenant J est axe de symétrie de π et du cylindre, donc de E; sa projection horizontale est donc un axe de e, dont l'autre axe est δ. On détermine alors immédiatement les quatre sommets de l'ellipse e, ce qui la détermine et permet de la construire aisément (en utilisant, par exemple, la méthode dite de la bande de papier) (cf. exercice 8.12) (fig. 7).

L'épure de la figure 7 représente la portion de cylindre supposée opaque comprise entre deux plans de bout Π_1 et Π_2.

2. Cône de révolution d'axe vertical.

La détermination d'un point du cône dont on donne la projection horizontale m se fait immédiatement en remarquant que la section du cône par un plan vertical contenant l'axe est constituée de deux génératrices. On obtient deux solutions (m, m'), (m, n') quel que soit m différent de s.

La détermination d'un point du cône dont on donne la projection frontale r' se fait immédiatement en remarquant que la section du cône par un plan horizontal est un parallèle, ou que la section du cône par un plan de bout contenant s est constituée de 0, 1 ou 2 génératrices que l'on détermine par les points où elles coupent un parallèle donné, par exemple, celui qui est situé dans le plan horizontal de projection.

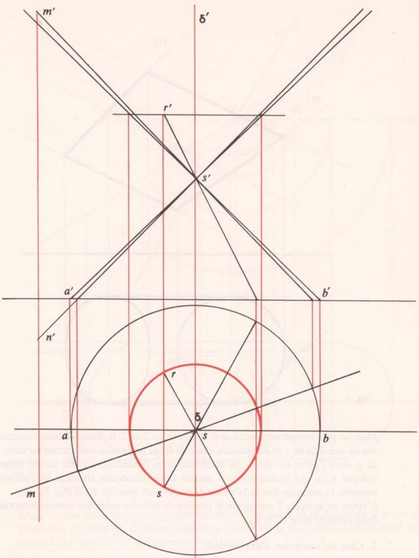


fig. 8

Il n'y a de solutions que si r' appartient à la réunion de deux secteurs angulaires contenant δ' et limités par les projections frontales des génératrices du cône contenant les points des parallèles où la tangente est de bout. On obtient deux solutions (r, r') et (s, r') si r' est à l'intérieur des secteurs angulaires, et une seule si r' est sur un des bords.
Les génératrices (SA) et (SB) sont les génératrices de contour apparent frontal du cône (fig. 8).

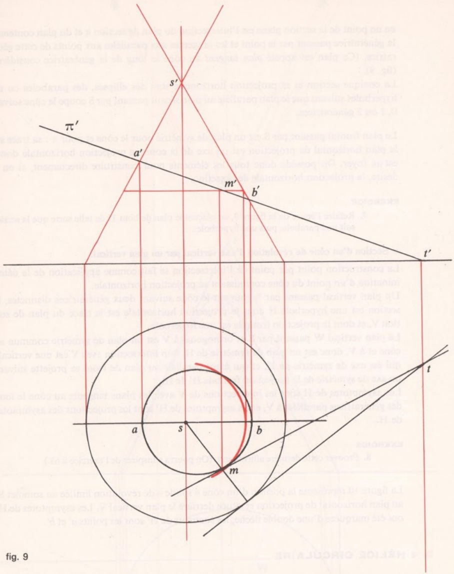


fig. 9

• **Section plane d'un cône de révolution d'axe vertical par un plan de bout.**

La construction faite ci-dessus de la projection horizontale d'un point du cône connaissant sa projection frontale permet de construire autant de points de l'intersection qu'on le désire.
On a vu (cf. Exercice 8.69) que la section plane est une conique, se projetant horizontalement suivant une conique.
On peut construire la tangente en tout point, en remarquant qu'une tangente est caractérisée par le fait qu'elle rencontre la conique en un seul point, et que par suite la tangente

en un point de la section plane est l'intersection du plan de section π et du plan contenant la génératrice passant par le point et les tangentes aux parallèles aux points de cette génératrice. (Ce plan est appelé *plan tangent* au cône le long de la génératrice considérée) (fig. 9).

La conique section et sa projection horizontale sont des ellipses, des paraboles ou des hyperboles suivant que le plan parallèle au plan sécant passant par S coupe le cône suivant 0, 1 ou 2 génératrices.

Le plan frontal passant par S est un plan de symétrie pour le cône et pour π : sa trace sur le plan horizontal de projection est un axe de la conique projection horizontale dont s est un foyer. On possède donc tous les éléments pour construire directement, si on le désire, la projection horizontale de la section.

EXERCICE

7. Refaire l'épure de la figure 9, en plaçant le plan de bout Π de telle sorte que la section soit une parabole, puis une hyperbole.

• **Section d'un cône de révolution d'axe vertical par un plan vertical.**

La construction point par point de l'intersection se fait comme application de la détermination d'un point du cône connaissant sa projection horizontale.

Un plan vertical passant par S coupant le cône suivant deux génératrices distinctes, la section est une hyperbole H dont la projection horizontale est la trace du plan de section V, et dont la projection frontale est une hyperbole.

Le plan vertical W passant par S et orthogonal à V est un plan de symétrie commun au cône et à V, donc est un plan de symétrie de H. Son intersection avec V est une verticale qui est axe de symétrie de H, et qui étant parallèle au plan de front se projette suivant un axe de symétrie de la projection frontale H' de H.

Les asymptotes de H sont les intersections de V avec les plans tangents au cône le long des génératrices parallèles à V, et les asymptotes de H' sont les projections des asymptotes de H.

EXERCICE

8. Prouver cette dernière affirmation. (On pourra s'inspirer de l'exercice 8.69.)

La figure 10 représente la portion d'un cône « solide » de révolution limitée au sommet S, au plan horizontal de projection et située derrière le plan vertical V. Les asymptotes de H' ont été marquées d'une double flèche, les sommets de H' sont les points a' et b'.

9. 4 HÉLICE CIRCULAIRE

a) Définitions.

Définition.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E_3. L'ensemble des points dont les coordonnées dans ce repère sont

$$x = a \cos \theta \ , \quad y = a \sin \theta \ , \quad z = \lambda \theta \ ,$$

θ décrivant $\mathbb{R}$, est appelé une **hélice circulaire**.

Cette hélice est située sur le cylindre de révolution d'axe $D(O, \vec{k})$ et de rayon a. On appelle **pas de l'hélice** le nombre réel $2\pi |\lambda|$.

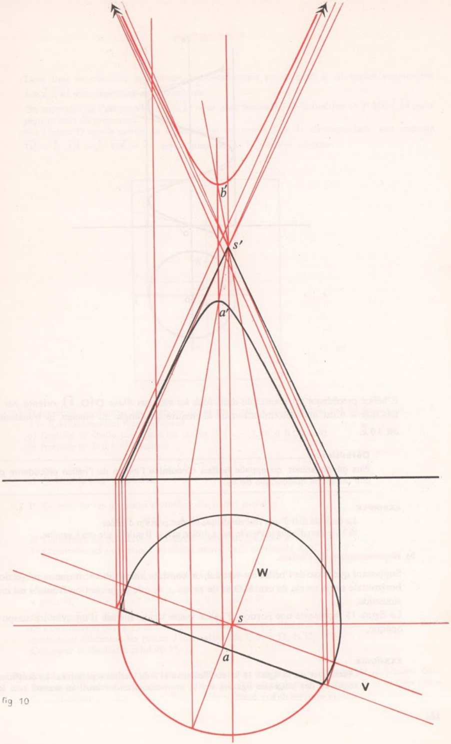


fig 10

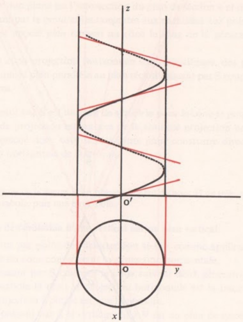


fig. 11

L'hélice précédente est invariante dans tous les vissages d'axe $D(O, \vec{k})$, orienté par $\vec{k}$, tels que si θ est une détermination de la mesure de l'angle du vissage, la translation est $\lambda\theta\vec{k}$.

Définition.

Plus généralement, on appelle **hélice circulaire** l'image de l'hélice précédente par une similitude quelconque de E_3.

EXEMPLE

Le bord du filet d'une vis cylindrique est une portion d'hélice.
Si $\lambda > 0$ on dit que la vis a le pas à droite, si $\lambda < 0$ qu'elle a le pas à gauche.

b) Représentation de l'hélice.

Supposant que l'axe de l'hélice est vertical, on constate immédiatement que sa projection horizontale est le cercle de centre O et de rayon a, et que sa projection frontale est une sinusoïde.

La figure 11 représente une portion d'hélice tracée sur la surface d'un cylindre supposé opaque.

EXERCICE

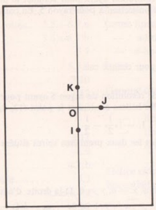
Déterminer sur la figure 11 les coefficients a et λ de l'hélice représentée. Le coefficient angulaire des tangentes figurées sur la projection frontale est-il en accord avec les valeurs trouvées de a et de λ?

EXERCICES

Dans tous les exercices qui suivent, les coordonnées par rapport à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont exprimées en centimètres.

On suppose que l'on prend $P(O, \vec{i}, \vec{j})$ pour plan horizontal de projection et $P(O, \vec{j}, \vec{k})$ pour plan frontal de projection.

Sur l'épure O sera le centre de la feuille, et les points I, J, K correspondants aux vecteurs $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$, seront disposés de la manière suivante :



9.1 Déterminer et effectuer les rotations ayant pour axe la droite définie par les équations $x = 5$, $y = 0$, et qui rendent respectivement :

a) frontale la droite contenant les points A (7, − 3, 0) et B (5, 4, 8)

b) frontale la droite d'équations

$$x - y - 2 = 0 \quad , \quad y + z - 5 = 0$$

c) de bout le plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$.

9.2 1° Déterminer les distances mutuelles des points suivants :

$$A(5, -4, 4) \quad , \quad B(2, 4, 0) \quad , \quad C(6, 1, 5).$$

2° Construire les projections du cercle contenant ces trois points.
3° Construire les projections du cercle inscrit dans le triangle ABC.

9.3 On considère les droites D_1 et D_2 dont les équations sont :

- pour D_1 $\quad x - y - 5 = 0 \quad , \quad y - z + 5 = 0$
- pour D_2 $\quad x + y - 5 = 0 \quad , \quad y + 2z - 6 = 0.$

1° Mesurer leur distance et leur angle.
2° Construire la perpendiculaire commune Δ à D_1 et D_2. Mesurer la longueur du segment de Δ ayant pour extrémités les points d'intersection de Δ avec D_1 et D_2.
Comparer le résultat à celui du 1°.

9.4 Représenter la portion de solide supposé opaque limitée par le cylindre de révolution dont l'axe est la droite d'équations $x = 7$, $y + z - 7 = 0$ et dont le rayon est 5, et par les plans P_1 d'équation $z - 2y - 12 = 0$ et P_2 d'équation $z = 5$.

9.5 On considère le cylindre de révolution de rayon 4 dont l'axe est la droite d'équations

$$x + y - 7 = 0 \quad , \quad z - y - 7 = 0.$$

Représenter la portion de la surface de ce cylindre limitée par les deux plans orthogonaux à l'axe contenant les points de l'axe d'abscisses respectives $+9$ et $+4$.

9.6 On considère le même cylindre que dans l'exercice 5. En déterminer l'intersection avec les plans ayant pour trace horizontale la droite $x - y - 7 = 0, z = 0$, et dont l'angle avec l'axe du cylindre admet $\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$ comme détermination de sa mesure selon l'orientation adoptée.

9.7 On considère le cône de révolution ayant pour sommet le point (6, 0, 10) et dont le parallèle dans le plan horizontal de projection a pour rayon 5. En construire l'intersection avec les plans d'équations respectives :

a) $y - 2z + 10 = 0$
b) $2y - z + 8 = 0$
c) $x - y - 7 = 0$.

Faire une épure distincte pour chaque cas.

9.8 On considère le cylindre de révolution de rayon 5 ayant pour axe la droite d'équations $x = 7$, $y = 0$, et sur ce cylindre les hélices contenant le point (12, 0, 0) et correspondant aux valeurs suivantes du paramètre a : $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

Tracer pour chacune d'elles les deux premières spires situées au-dessus du plan $z = 0$.

9.9 **Sujet d'étude.**

Soit Δ la droite d'équations $x = a, y = 0$, D la droite d'équations

$$x = r + a, \quad z - z_0 = k(y - r),$$

et S la réunion des droites déduites de D par toutes les rotations d'axe Δ.

Δ est orientée par le vecteur $\vec{k}$. On désigne par r_θ la rotation d'axe Δ et d'angle θ, et par D_θ l'image de D par r_θ.

1° Représenter Δ, D et les droites correspondants aux déterminations suivantes de la mesure de l'angle θ :

$$\frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{4\pi}{3}, \quad \frac{3\pi}{2},$$

et avec les valeurs numériques suivantes des paramètres :

$$r = 3, \quad a = 7, \quad z_0 = 10, \quad k = 1.$$

Construire le point d'intersection d'une droite D_θ avec le plan $x = a$.

Exprimer les coordonnées (y, z) de ce point en fonction de θ. En déduire une équation de l'intersection H de S et du plan $x = a$, dans le repère $(I, \vec{j}, \vec{k})$, I étant le point $(a, 0, z_0)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2° Déterminer une équation de S dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (On exprimera une condition nécessaire et suffisante pour que le cercle d'axe Δ contenant M (x, y, z) rencontre D).

3° On appelle G_φ l'image de D par la symétrie orthogonale par rapport au plan contenant Δ et déduit de P $(I, \vec{j}, \vec{k})$ par la rotation r_φ :

Montrer que les droites G_φ sont incluses dans S, que deux telles droites ne sont ni parallèles ni concourantes, et que toute droite G_φ rencontre toute droite Δ.

Montrer que les projections frontales des droites G_φ et D_θ sont tangentes à la projection frontale de H, ou en sont les asymptotes. (Rapprocher ce résultat de celui de l'exercice 8.65.)

4° Montrer que toute section plane de S est une conique. En déduire que S ne contient pas d'autres droites que les droites D_θ et G_φ.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Affinité 3.25
angle de deux demi-droites 5.5.a-6.7.a
— de deux droites 5.6.a-6.7.b
angles dans $\mathcal{E}_n$, $n > 2$ 5.7
angle nul, plat, droit 5.5.d
application affine 3.10
— linéaire 1.12
— orthogonale 4.3

Barycentre 3.11
base 1.9
— orthonormée 4.2.b
— orthonormée directe 5.3
bissectrice 5.5.e-6.7.a
bornée (partie) 8.12

Combinaison linéaire 1.6
cône de révolution 9.3
conique 8.1
Cosinus 5.5.c
cylindre 9.3

Déterminant 2.3
distance 4.1
— euclidienne 4.1.c-6.1.b

Ellipse 8.2
espace affine 3.9
— affine euclidien 6.1.a
— des translations 3.9
— vectoriel 1.4
— vectoriel euclidien 4.1.a

Famille 1.1
— à support fini 1.6
— génératrice 1.7
— libre 1.8

fonction affine 3.21
forme linéaire 1.16
— *n*-linéaire 2.1
— *n*-linéaire alternée 2.2
foyers 8.4

Groupe des isométries 6.6
— des similitudes 7.1.b
— linéaire 1.13
— linéaire affine 3.16
— orthogonal 4.5

Hélice circulaire 9.4
homothétie 3.22.a
— vectorielle 1.17
hyperbole 8.2
hyperplan affine 3.12.b
— vectoriel 1.16

Image réciproque 1.14.a
inégalité de SCHWARZ 4.1.b
invariant 3.7
isométrie 6.4
— positive, négative 6.6
isomorphisme d'espaces affines 3.16
— d'espaces affines euclidiens 6.5
— d'espaces vectoriels 1.13
— d'espaces vectoriels euclidiens 4.4

Matrice 1.20
— orthogonale 4.6.c
mesure algébrique 3.12.b
— des angles 5.6.d
milieu 3.11

Norme euclidienne 4.1.b
noyau d'une application linéaire 1.15

Orientation 5.3
orthogonalité 4.2-6.2

Parabole 8.2
parallélisme 3.12.e
perpendiculaire commune......... 6.3
produit mixte 5.9
— scalaire 4.1.a
— vectoriel 5.8-5.9
projecteur 1.18
projection orthogonale 6.2

Rabattement 9.2
repère affine 3.12.a
— cartésien 3.12.b
retournement 4.12.b
rotation 6.12-6.13.a
— vectorielle 4.11.a-4.12.b

Sinus 5.5.c
similitude 7.1.a
— directe, inverse 7.1.c
somme de sous-espaces vectoriels. 1.5.d
— directe 1.5.e
sous-espaces vectoriels 1.5.a
— supplémentaires 1.5.e
supplémentaire orthogonal 4.2.c
symétrie 3.24.a
— orthogonale 6.2.b-6.8
— orthogonale hyperplane .. 6.9
— orthogonale vectorielle ... 4.7
— orthogonale vectorielle hyperplane 4.8
— vectorielle 1.19

Théorème de THALÈS 3.23.c
transformation 3.6
— orthogonale 4.5
— orthogonale positive, négative 5.1
transposée d'une matrice 4.6.b
translation 3.20

Variété linéaire affine 3.13.a
variétés supplémentaires 3.12.c
vecteur directeur 3.12.b
vissage 6.13.a

Table des matières

Avant-propos 3

1 |
Espaces vectoriels et applications linéaires..... 5

2 |
Formes multilinéaires. Déterminants........... 53

3 |
La structure affine.......................... 63

4 |
Espaces vectoriels euclidiens et applications orthogonales 139

5 |
Orientation. Angles. Produit vectoriel......... 175

6 |
Espaces affines euclidiens et isométries........ 215

7 |
Similitudes................................ 275

8 |
Coniques 289

9 |
Géométrie descriptive....................... 327

Index terminologique 347

Imprimé en France
IMPRIMERIE FIRMIN-DIDOT. — PARIS - MESNIL - IVRY — 8528
Dépôt légal : 1er trimestre 1972
N° d'Éditeur C. 15 599 (PF. c. VII)

183 149